PROVINCIA DI TORINO

BIBLIOTECA

MS - b - 50

CORSO

DI

MECCANICA TEORICA

del Professore

C. I GIULIO

— PARTE PRIMA —

Statica.

TORINO MDCCCLIII.

LDINO GIOVANNI SCRISSE.

LEZIONE I

Introduzione sulla filosofia naturale e sui metodi di indagine e ragionare – Chimmatica – Meccanica e sua divisione.

L'ESISTENZA de corpi come oggetti sensibili è cosa universalmente riconosciuta, né v'ha che alcun metafisico il quale voglia ostinarsi a credere le sensazioni da essi in noi eccitate come altrettante illusioni. Ma ragionevolmente e seriamente non se ne può dubitare. L'uomo affatto dalle sensazioni da essi prodotte e dotato di intelligenza, è spinto da congenito desiderio di investigare la natura di essi, e di tutte le mutazioni che in qualunque modo possono succedere fra i corpi e nelle loro relazioni. Ogni mutazione che succeda in uno o più oggetti qualunque si appella fenomeno.

Ma prendendo ad esaminare l'infinita varietà delle mutazioni che succedono agli enti sensibili, egli è facile scorgere che queste si possono disporre in molte classi secondo la varia natura degli enti a cui appartengono. Se esse riguardano la coscienza o gli enti immateriali, la loro considerazione appartiene alla filosofia razionale; se riguardano i corpi cioè gli esseri materiali organici ed inorganici entrano nel dominio della filosofia naturale. La quale adunque risulterebbe dietro queste considerazioni = la scienza di tutti gli esseri materiali ".

Il genere umano sparso sulla superficie della terra è stato condotto fin da principio dalle sue relazioni con essa e cogli esseri su di essa esistenti a studiare la loro natura e la cagione delle loro mutazioni; la natura e l'indole degli animali e dei vegetali, le varietà dei corpi inorganici; le loro composizioni e scomposizioni furono il soggetto senza dubbio delle meditazioni degli uomini da tempi antichissimi; e da questi principj generarono la zoologia, la botanica, la mineralogia, la fisiologia vegetale ed animale, la Chimica. Dalla contemplazione dei corpi celesti e dall'osservazione dei loro movimenti nacquero la cosmografia e l'astronomia; lo studio della superficie e dell'interno del globo nostro furono il soggetto della geografia e della geologia; e così dicasi delle altre scienze naturali. Le quali da principio ristrette ad un piccolo numero di cognizioni e miste a gran numero di errori, vennero per molto progresso continuo ma lento, a formare oggidì un gran corpo che come ha sì molte affini tutte le comprende, sebbene le medesime vadano distinte per la varia natura dei fenomeni che prendono a considerare. Lo stato presente della scienza è lontano veramente dalla perfezione, ma è almeno abbastanza distante dall'antica ignoranza e dall'antica rozzezza.

Volendo anzi proporre il mezzo onde pervenire alla verità nelle scienze naturali è l'induzione, colla quale da più fatti osservati, si conclude che in simili circostanze i medesimi fatti sempre si dovranno produrre. Il principal fondamento suo è il principio evidente che dalle stesse cause

in simili circostanze devono produrre i medesimi effetti. Così per es. dal vedere il sole levarsi p. e. 1000 volte dalla parte di levante concludiamo che domani pressomani di giorno in giorno si leverà ancora e ancora si vedrà sorgere dall'oriente. Benchè in questo lo possa affermare con certezza logica e nulla ragionevole che un giorno finalmente o non dobbiamo più vederlo o almeno dobbiamo vederlo sorgere in altre plaghe del cielo che quella di levante. Cercheremo dunque la causa che produce il sorgere dell'astro del giorno concludiamo che quest'effetto si realizzerà per l'avvenire come pel passato.

Ma noi osserviamo che la luna, i pianeti e le stelle nascono e tramontano quasi nello stesso modo che il sole, e le vediamo compiere lor giro diurno quasi in egual tempo. Questi effetti essendo analoghi forza è concludere che debbano essere prodotti da cause analoghe, cioè dalla stessa causa; e difatti è principalmente alla rotazione diurna del globo che essi sono dovuti. Ma qual causa può produrre siffatto rivolgimento della sfera celeste, del sole, della luna, per non parlare degli altri pianeti? Ecco che qui abbandonando l'indagine gli uomini si trovarono obbligati a dedurre dall'effetto noto una causa ignota, ed a ragionare non più dall'induzione ma da un ragionamento. Difatto anticamente si credette per principio che le stelle fossero infisse nel firmamento e che questo da essi immaginato come una grande sfera di cristallo, girabile regolarmente su due poli una volta al 24 ore. E per spiegare le diversità che si osservano nei moti del sole, della luna e degli altri pianeti credevano che essi partecipassero

del moto del firmamento, ma che da esso non fossero sempre talmente da non potere avere un moto loro proprio, adattato alle apparenze che essi presentavano. Questo fatto stabilito ragionando sugli effetti senza battersi potrà dare una prova perentoria se ciascuna ipotesi; e poco sarà vera o falsa. Così si sa per es. che oggidì molto meglio si spiegano i fenomeni suddetti col moto dei pianeti, e della terra intorno al sole, colla rotazione della terra sul proprio asse, e colla rivoluzione della luna intorno alla terra.

Che se continuando l'osservazione dei moti lunari a cagion d'esempio noi osserviamo che essi presentano molta diversità da quelli del sole e delle stelle. Vediamo per es. che il sole sempre è splendido di luce abbagliante e perpetua; mentre la luna luce di una luce assai più pallida, e di una luce non sempre costante. Poiche esso in certi giorni sparisce affatto per circa una settimana dopo vediamo la luna in forma di un semicerchio lucido colla parte curva rivolta verso il sole da cui alla data allora di un angolo retto all'incirca. Dopo un altra settimana ella si trova assai più lontana dal sole, cosicche guardando il sole essa ci fa travedere e crescere; allora la vediamo splendere in forma di un circolo di grandezza presso a poco eguale a quello del sole. Continuando ad osservare i fenomeni al fine della 3ª settimana troviamo che essa dista dal sole di 270° ossia 3 angoli retti, contati sul cerchio maggiore della sfera celeste che a noi presso i 2 luminari descrivono. La luna in conseguenza dista così poco dal sole di due angoli retti, e ritorna ad avere la figura di un semicircolo

colla convessità rivolta verso il sole e verso levante. Finalmente circa 14° settimana si ricomincerà alla luna crescente come in principio, cioè alla opposizione colgare alla luna nuova.

Tutti questi adunque sono i fatti che osservansi. Ma credendo questo giro e queste fasi ripetersi costantemente subentra l'induzione a concludere che la stessa causa produce costantemente questi stessi fenomeni. E siccome cause analoghe devono produrre analoghi effetti, così si tende a far ricerca di effetti simili a quelli, di cui si conosce la causa per dedurne la causa delle fasi. Se a cagion di esempio si immaginasse che la luna fosse un globo a metà lucido, e a metà opaco, e che tuttavia l'emisfero lucido rivolto sempre verso il sole; egli è chiaro che supponendo il sole più distante dalla terra che non la luna (il che dagli eclissi solari può provarsi), le apparenze si troverebbero spiegate. Ecco un globo. Ma se si riflette alla poca intensità della luce lunare, si vedrà che essa si può paragonare a quella di un globo non bene illuminato. E siccome non vi ha certamente per la luna fonte di illuminazione più vicina, nè più grande del sole, ecco che vieni a concludere, le fasi risultare dall'illuminazione della luna che produce il sole, combinata colle diverse posizioni rispettive del sole, della luna, e della terra. Ecco come l'induzione dalla somiglianza degli effetti prodotti da cause simili ci ha portati ad immaginare un altro globo che ci mostrasse ogni più plausibile, perchè spiega meglio dell'altro tutti i fenomeni.

Della filosofia naturale adunque si osservano principalmente i fenomeni

se ne inferiscono leggi ~~particolari~~ generali, da queste leggi ritraendo alle cause si deducono altre ~~di~~ ragionamento; le quali servono poi a stabilire altri fatti ed altri fenomeni, che se già erano noti sono una prova delle verità dei metodi risultati; se non ancor noti, allargano il campo della scienza e potranno fornir luce a nuove scoperte. E così di induzione in induzione, di ragionamento in ragionamento, di legge in legge si tende allo scopo della ricerca naturale il quale è di scoprire le leggi e i principi fondamentali su cui posa come base e secondo cui è ordinato il ~~mondo~~ materiale

È da notare riguardo all'induzione che ella non può mai darci di fatto di cui ci presta cognizione una certezza logica: vale a dire che non ci sarebbe alcuna assurdità a voler supporre la verità della conclusione stabilita, ritenendo di assurdità matematica e contraddizione ai principii di ragione. Per esempio è certissimo che tutti gli uomini muoiono; ma non sarebbe assurdo che alcuno dei presenti o dei futuri non morisse: quella tal certezza che ogni uomo ha di morire non è una certezza di induzione: è in questo senso che si può pur donare ad Alessandro Manzoni (il celebre Stradivario di Lecco) il dubbio non sappiamo se vero o no che avea se dovesse morire o no.

Dopo l'induzione delle investigazioni scientifiche viene il ragionamento il quale non è altro che una operazione della mente, con cui posti certi ben fondati giudizi si viene a dedurre verità più lo avanti ignote dalle note. E questo ultimo se il ragionamento è ben instituito godono di eguale grado di certezza che i principii da cui si partì. Ma per vedere qual differenza vi

passi per il ragionamento e l'indagine scegliamo il seguente esempio.

Supponiamo che un uomo collocato in una sala sulla cui parete sieno descritti mille triangoli rettangoli, e che avendone misurati 2. 3. 4. 5. ... 100 - abbia trovato che la somma dei quadrati fatti sui due cateti eguaglia il quadrato fatto sull'ipotenusa; questa verità ricercata quell'uomo si crederà sufficientemente dal certificato egualmente per tutti i triangoli rettangoli descrivibili. Ma se taluno volesse negli esercizi una specie di triangoli rettangoli per cui ciò non è vero, potrebbe egli senza misurarli, sostenere il suo bonum? No certo, perchè egli non può dimostrare che è così e che non può essere altrimenti. Per conseguenza di falsità si rivelerebbe in tal caso. Archimede che gli fa toccar con mano, che negar tal verità è come dire che due quantità eguali ad una terza non sono eguali fra di loro, e ciò per una delle sue regole di ragionamento, a cui non possa giammai negare il suo consenso. Tutto ciò in generale ha una delle filosofia naturale e dei mezzi che ha per giungere al vero. Ritorniamo a dire più particolarmente di quella parte che ne forma il soggetto del nostro studio.

Di tutti i fenomeni naturali il più frequente e quello cui tutti gli altri si possono ridurre è il moto. Il moto si definisce per passaggio da un luogo ad un altro dello spazio. Nel moto si distinguono varii elementi: il tempo, lo spazio, la velocità, le cause producenti, modificanti, distruggenti, lo stato di aggregazione delle molecole che si muovono. Altri elementi, ovvero particolari modificazioni di esso si considereranno più avanti. Lasciando in questo

il moto in se stesso, senza tener conto d'alcun elemento dico tal moto geometrico. Per es. il moto d'un triangolo rettangolo attorno ad un cateto genera cono: or nella geometria si considera tal movimento indipendentemente da ogni suo elemento, onde risulta moto geometrico. Ma pensando a considerare il moto nel tempo e nello stato d'aggregazione dei corpi la ricerca del movimento prende il nome di Cinematica, così considerando il moto di un orologio vedesi il moto delle ruote esser vario e composto per es. in tempi più o meno lunghi: la determinazione delle ragioni di questi movimenti sarebbe un problema di Cinematica. Lo stesso dicasi dell'origine che muove la macchina di un orologio. Ma ora aggiunge allo stato di aggregazione dei corpi così alla temperatura della fusione di tutti i metalli sarebbe risolto il problema dell'orologio, e a quella di 0° o meno quello dell'analisi. Inoltre ora tien conto della forza di coesione dei corpi solidi, duri o molli elastici o no; Solidi o liquidi; fragili; ec.

Ma la considerazione del moto nelle sue cause e nelle cause delle sue modificazioni, e lo studio di queste modificazioni formano propriamente il soggetto della Meccanica. A quel modo che la Geometria suppone il corpo dotato di estensione, ella lo pone animato da forze motrici e mosse per se medesime. Quando non si tien conto di queste accidenti che si incontrano nelle applicazioni pratiche o per meglio dire da poche principi evidenti dedurre le proprietà del moto considerato in astratto come la Geometria quelle dell'estensione dicesi Meccanica Razionale o Meccanica astratta. Quando

i principi di questa si applicano ai moti celesti, si ha ciò che si dice
Meccanica celeste o Fisica celeste. Finalmente quando i principi della
Meccanica Razionale si applicano alla ricerca del miglior modo di servirsi del
moto per vantaggio e comodo nostro ottiensi ciò che si dice Meccanica pra-
tica o instrumentale. Se si domandasse per es. quale forza e direzione
deve darsi alla palla di un cannone perchè giunga in un dato punto dopo descritta
una certa linea avremo un problema di Meccanica razionale. Ma per
es. trovandosi taluno a fronte di un lupo, avuta la maniera di colpirlo
colla testa con un sasso e fatto poggio dovrebbe un problema di Meccanica
pratica, in cui si dovrebbe applicare ad un caso particolare il problema di Mecca-
nica razionale sopradetto. E trovare la forza necessaria a muovere un corpo
attorno ad un asse sarebbe un problema di Meccanica razionale che diverrebbe
di Meccanica pratica quando si applicasse al caso di una ruota.

La Meccanica in generale si distingue in 2 parti secondo che considera
il moto dei corpi solidi o fluidi. Nel 1° caso si chiamerebbe grecizzando
Stereomeccanica (στερεος, corpo solido) e nel 2° Idro-meccanica o
Idraulica. Inoltre o fa nel moto un caso particolare ed è quando le
cause di un moto si elidono tutte le une colle altre; allora il corpo o i
corpi per inerzia rimanendo in istato diresi il sistema molto in equili-
brio. La Meccanica che considera i corpi in equilibrio dicesi Statica;
quella che li considera in moto Dinamica. E applicando qui le divi-
sioni secondi i corpi solidi e liquidi o fluidi, per parlare più esattamente

avremo la Stereostatica, e la Stereodinamica, ai quali nomi si può sostituire i più usati Statica e Dinamica; e poi l'Idrostatica e l'Idrodinamica. Nelle quali poi si ha sempre la parte razionale e la parte pratica.

(Moseotti, discorso preliminare al corso di Fisica matematica – Barlow, introduzione alla fisica – Venturoli, prefazione alla Meccanica – Newton, prefazione ai principi di Filosofia naturale – Corte, Lezioni)

LEZIONE II

Proprietà che considera la Meccanica nei corpi – Estensione, figura e geometria dei corpi – Loro impenetrabilità e penetrazione apparente – Stato d'aggregazione, solidi e fluidi – Fluidi liquidi ed aeriformi, incomprensibili ed elastici – Gaz e vapori – Divisioni della Meccanica secondo questo stato d'aggregazione – Cinematica – Forze, e loro definizione.

LA Meccanica adunque in generale è quella scienza che considera il moto dei corpi in ordine alla variazione di luogo al tempo ed alle cause che vagliono a produrlo, modificarlo in un modo qualunque e distinguerlo, studiando queste produzioni, modificazioni e distruzioni, e tenendo conto nei corpi nostri dell'estensione, dell'impenetrabilità e dell'energia principalmente. Lo stato d'aggregazione dei corpi non serve che a dividerla in tante scienze, senza però che la considerazione sia ad esse affatto essenziale. Prima di entrare in materia converrà fondare alquante delle proprietà delli quali abbiamo detto trovarsi cotte in Meccanica, e principalmente dell'estensione.

L'Estensione è una delle proprietà comuni ai corpi che diconsi specialmente quei segni di cui non si può avere idea di corpo; ed è quella proprietà per cui un corpo occupa una certa porzione dello spazio infinito; il qual corpo si chiama allora esteso. Si chiama volume del corpo la porzione dello spazio da esso occupata.

Ogni porzione di spazio potendosi considerare divisa in 2 o più parti ne segue che ogni corpo è divisibile in parti. La divisione dei corpi può immaginarsi ed è veramente di due specie, fisica e matematica.

Ogni corpo è un aggregato di molecole o particelle di grandezza affatto per nostri mezzi di vedere insensibile, e di numero non rigorosamente espresso ma grandissimo. Queste molecole sono separate tra di loro da distanze sensibili una finita, e sono tenute dalla coesione le une colle altre e sono tenute insieme, legate e in equilibrio per mezzo delle reciproche azioni di attrazione e repulsione che a vicenda esercitano le une sulle altre. Ogni molecola risulta composta di 2 o più parti (e talvolta anche di una come nei corpi semplici) di natura diversa dalle atomi: e secondo una legge scoperta da Dalton, ogni molecola contiene atomi delle varie specie in egual proporzione che le altre. I quali atomi sono l'ultimo punto a cui si possa giungere colla divisione fisica. Ogni molecola è un sistema di atomi tenuti insieme dalle affinità che ciascun atomo ha per gli altri della stessa molecola. Gli atomi costituiscono le parti componenti del corpo; le molecole o sono tutte uguali o simili, e sono tutte simili. Così l'acqua è composta di idrogeno e di ossigeno, ogni massa d'acqua dunque conterrà un numero assai grande di molecole uguali, le quali tutte saranno non effettivamente ma realmente divisibili in 3 parti di cui una conterrà atomi d'idrogeno e due atomi d'ossigeno nelle proporzioni stesse. Ed ecco questi componenti entrano a formare la massa stessa intera dell'acqua. Ogli conviene distinguere tra

attrazione e affinità, perchè questa è quella forza che tiene unite le varie atome componenti le molecole, mentre la prima agisce tra molecola e molecola di un corpo ed il risultato della sua azione è la coesione che esiste fra le parti integranti di tutto il corpo. L'altra divisione dei corpi è un puro concetto matematico, e non ha veruna esistenza reale. Si immaginano per il corpo posto in una situazione qualunque condotti ingiuti piani paralleli e tra loro ingiuti uguali ecciss. Il corpo resterà diviso in parti di lunghezza e larghezza finita, ma di altezza infinitamente piccola. Si condividano poi pel corpo infiniti piani perpendicolari ai primi e pure tra loro infinitamente vicini; avremo l'istesso corpo tutto diviso in lati sottilissimi e di lunghezza finita. Finalmente condividendo con simili sezioni di piani perpendicolari ai 4 piani, resulterà scomposto ~~in~~ geometricamente il corpo in un infinità di dadi o parallelepipedi elementari di cui ciascuno forma ciò che si dice elemento geometrico del corpo. Questa divisione si fa talora uso nella Meccanica.

Ritornando ora alla prima specie di divisione avvertiamo che quegli intervalli che sono tra molecola e molecola diconsi pori. In ogni corpo le molecole sono tutte contigue le une alle altre e perciò tutti i corpi sono porosi. Pol che consegue che la parte dello spazio limitata dalla superficie del corpo oltre il volume aggregato è diverso moltissimo dalla somma dei volumi delle sue parti integranti oltre del volume reale, il quale è sempre molto minore del primo nei corpi che noi conosciamo. Ed è anche da osservarsi riguardo alla porosità che bisogna guardarsi dal confondere i pori, quali furono sopra definiti

con quei fori. Ma in quali tutti i corpi organici si osservano e che pure in Biologia diconsi pori. Perciò questi, visibili o non, ad ogni modo hanno sempre dimensioni sensibili, laddove i veri pori hanno dimensioni insensibili, e si trovano in tutti i corpi organici ed inorganici.

La seconda proprietà di cui si ben ragiona in Meccanica è l'impenetrabilità; per cui una stessa porzione dello spazio non può essere occupata da 20 più corpi in una volta, ma da un solo, e un altro non può entrarvi senza che uno discacci il primo. E questa estendo una delle proprietà essenziali per dire che un corpo potesse penetrare in luogo di un altro la nostra mano non incontrando più resistenza al tatto, questo senso divenendo inutile, tutte le apparenze dei corpi si ridurrebbero ad una fantasmagoria. A quel modo che molti esempi la confermano molti altri pure tendono a smentirla come avviene quando si empie un bicchier d'arena ben secca e poi vi si versa sopra dell'acqua. Questo però è un esempio di penetrazione apparente.

Immaginate versando nell'acqua dell'acido solforico e dell'alcool, il miscuglio dapprima bolle, e per calore sviluppato si dilata, ma poi raffreddandosi va restringendosi, e talmente che la somma dei 2 volumi separati dei liquidi non mescolati è maggiore sensibilmente del volume intiero del miscuglio. E questo un 2° esempio di penetrazione apparente. Ho apparente perchè in tal caso non si ha reale penetrazione ma solo avvicinamento e diversa disposizione di molecole; e questi fenomeni servono a spiegare tal proprietà, ma servono a stabilire la porosità colla quale appar facilmente si spiegano.

La teoria degli atomi e delle molecole di cui sopra si è data un idea, serve mirabilmente a spiegare i diversi stati d'aggregazione, sotto cui si presentano i corpi. Quando le molecole sono tra di loro unite con tale tenacità, che oppongono sensibile o gagliarda resistenza a che le molecole separate o mutar di sito; il corpo si dice solido; quando le molecole sono sciolte da ogni vincolo sensibile tra di loro e possono cambiare di posizione rapidissimamente per qualunque piccola minima azione il corpo si chiama fluido.

Ma i fluidi stessi non sono tutti d'egual indole. Se per es. in due vasi cilindrici eguali da uno stantuffo si spinga rispettivamente dell'acqua e dell'aria, e ognuno di questi 2 stantuffi si gravi di un peso, si vedrà che il 1° stantuffo rimarrà nella posizione primitiva; mentre il 2° si abbassa considerevolmente comprimendo l'aria sottoposta. Lo stesso succede ove in luogo dell'acqua si metta un liquido qualunque o uno di quei fluidi che possono raccogliersi in vasi, e le cui molecole non agiscono tra loro né per attrazione né per espulsione; e in luogo dell'aria un fluido qualunque aeriforme, le cui molecole tendono a respingersi scambievolmente. Viene quindi la distinzione in fluidi liquidi e incomprimibili, e in fluidi aeriformi compressibili e per conseguenza anche elastici. Perciò scaricando l'aria del vaso suddetto del peso di cui avevamo gravato, ella ritorna al 1° volume sollevando lo stantuffo alla primitiva altezza.

Ma tra i fluidi elastici ed aeriformi ci ha ancora una distinzione. Imperocchè versando con un poco d'acqua e carico d'uno stantuffo premente il fluido

noi tosto vedremo sollevarsi lo stantuffo a poco a poco, e condannato a salire alzarsi tanto da esser fuori del vaso. La potenza che ha alzato lo stantuffo è un fluido aeriforme creato dall'acqua, e per meglio dire quel fluido prende allo stato aeriforme. Ma se o raffreddiamo il vapore oppure si faccia rimanere a bassa temperatura, si vedrà che esso ritorna al 1° stato d'acqua. La distinzione tra questi fluidi aeriformi da essi abbassamento di temperatura e compressione poterono ridursi a liquidi ed ancora a solidi; e tra quelli altri che per qualunque temperatura o pressione mai non si poterono ridurre in vicini a soggetti i primi chiamandosi vapori i secondi gaz. Tale distinzione però non è rigorosa anzi per molte esperienze oggidì si trova che come ogni solido è riducibile allo stato liquido e aeriforme; così ogni liquido si può ridurre a solido ed a vapore, e ogni gaz a liquido, e quindi ancora a solido, come già si è fatto per l'acido carbonico.

Noi abbiamo di già data la definizione della Meccanica secondochè considera il moto e l'equilibrio dei solidi e dei fluidi. Ma la Meccanica dei fluidi per la diversità di questi in liquidi ed in aeriformi si divide anch'essa in Idrostatica e Idrodinamica propriamente detta (ὕδρος, acqua) ed in Pneumatica o Pneumodinamica (πνεῦμα, spirito, aria), che si comprendono comunemente sotto il nome di Pneumatica.

Veniamo finalmente a quella proprietà dei corpi che principalmente è il fondamento della Meccanica, ed è l'energia, per cui ciascun corpo può darsi o toglierselo movimento da per se. Molte esperienze si citano dai Fisici

in conferma di questa proprietà; ma il principio di questa universalità applicata a questo punto basta a provarla. Niun effetto può dirsi senza causa, dunque nessun moto può dirsi senza forza o causa di moto. La qual causa non può esistere nel corpo medesimo, materia bruta, di sua propria natura.

Ogni moto adunque ha una causa che lo produce, e questa forza è ciò che chiamasi forza. In generale però dicesi forza ogni causa che vale a produrre ad impedire, o modificare o togliere il movimento. Così un corpo che cada ha per causa il moto la forza di gravità che lo tira al centro della terra. Ma corpo lanciato contro una parete resta impedito nel suo movimento; la forza che lo ha impedito è la resistenza della parete. E quando vediamo un globo fatto correre per terra andar decrescendo di velocità e finalmente fermarsi, dobbiamo attribuirlo alla resistenza degli attriti. Del terreno che gli fanno successivamente modificare e poi distruggere il moto.

(Vedi i preliminari di tutti i trattati di Fisica e quelli del trattato di Meccanica di Kater e Lardner-)

LEZIONE III.

Equilibrio - Quiete - Pressione - Moto rettilineo, curvilineo, uniforme, vario, accelerato, ritardato - Spazio - Velocità.

DALLA definizione precedente delle forze abbiamo dato, segue che se noi ad un corpo che sia in riposo o che si muova applicheremo una forza questa ne cangierà il suo stato e produrrà alcuna alterazione nel suo moto se già si muova, o muoverà se stava in quiete. Supponiamo ora che allo stesso corpo si applichino un'altra forza di potenza eguale alla 1ª e in senso contrario ad essa; siccome non si ha ragione perchè il corpo si tenga piuttosto più dall'una che dall'altra, il risultamento delle due forze unite sarà nullo, ossia una forza distruggerà il potere dell'altra. Il corpo allora si dirà essere in equilibrio. In generale quando più forze applicate ad un corpo reciprocamente si elidono cioè non risulta alcuna mutazione nel suo stato di quiete o di moto che si goda dal corpo essere in equilibrio. E l'equilibrio stesso si definirà per lo stato di 2 o più forze che applicate contemporaneamente ad un corpo si elidono a vicenda lasciando il corpo nello stato di quiete o di movimento, in cui sarebbero se cessassero di operare. Si può così vedere la distinzione che da fare tra quiete ed equilibrio. Ricordiamo a questo proposito quando non si parlò sollecitato da veruna forza, per la legge d'inerzia si può dare nè si dà moto alcuno. Ma per l'equilibrio richiedesi soltanto che le forze applicategli siano tali che non

gli turbino lo stato di avere prima dell'applicazione di queste.

Ma nell'equilibrio indotto si dirà che avrà almeno mantenuto. Sia per es. un filo flessibile sollecitato all'estremità da 2 forze tendenti in direzioni opposte e ritorte alla ragione. Se il filo era in 2 forze uguale, il filo si manterrà nel verso della primitiva, ma se sono uguale il filo starà in equilibrio. Ciò a dire che 2 forze applicate agli estremi, che forze di tensione avrà le molecole del filo si possono equilibrare. Ma se le forze di tensione avute le molecole del filo si distruggono, o per es si taglia il filo, le forze cooperanno di farsi equilibrio e spingeranno i 2 rami del filo in parti contrarie. Questo stato del filo in cui sono nulle in azione le sue forze molecolari d'attrazione a produrre l'equilibrio direm tensione, e la equivalente alla sua forza elastica tesa.

Del resto se in vece per es questo libro è mantenuto sostenuto a tale 2 forze eguali ed opposte una verticale verso il centro del libro, esso starà anche in equilibrio ma le forze di tensione avutale tra le molecole del libro. Ma supponiamo tolte queste forze, cosicchè le molecole possano avvicinarsi indipendentemente; ecco che i 2 pesi che sono applicate le 2 forze tenderanno ad avvicinarsi e sarà rotto l'equilibrio. Il libro con la pressione sua, compresso e lo stato suo in cui si impegnano a produrre l'equilibrio le forze molecolari di tensione.

Secondo lo stato di aggregazione dei corpi i movimenti sono più o meno complicati più o meno vari. L'elasticità che è nota d'una massa liquida sono

molto più varii, complicati e difficili a calcolare; ogni molecola si può dire avendo moti diversi, e potendo essa cangiare in molti modi posizione ~~rispettiva~~ rispetto alle altre. Epperò seguendo la legge generale dell'insegnamento delle scienze, che è di passare costantemente dal facile al difficile, incominceremo a considerare i moti dei corpi solidi, e siamo per credere la Statica e la Dinamica all'idrostatica e all'idrodinamica. E cominciando dai corpi solidi vedremo poi ai corpi flessibili per passare ai fluidi.

Moltissime e varie mostre sono le specie di movimenti, tra le quali sono principalmente a notarsi quelli di traslazione e di rotazione, di un corpo sopra di sè medesimo. Sapete ogni molecola di un corpo avendo un moto particolare che fa parte del moto generale sarà bene e più facile l'incominciare dal considerare il movimento di una molecola o punto materiale. E qui dovremo ben distinguere il punto materiale o meccanico dal punto geometrico. Imperocchè i Geometri definiscono il punto come ciò che non ha nè larghezza nè lunghezza, nè profondità; ma per noi che studiamo il moto dei corpi ciò che non ha nè lunghezza nè larghezza nè profondità, non è un corpo e non esiste. Per non cadere adunque nell'assurdo di considerare il movimento di una cosa che non esiste noi supponemo che il punto sia un corpo di dimensioni sensibili. Il punto Meccanico adunque è un corpo le cui dimensioni sono minori di qualunque dimensione data.

Venendo ora particolarmente ai fenomeni del moto incominciamo ad osservare, che non si può concepire che un punto si muova o passi, secondo l'espressione del

moto da un punto all'altro dello spazio, senza che esso debba passare per tutti i punti intermedii, non vorrebbe dire la stessa cosa poiché potrebbe succedere un corpo nell'luogo ove si trova per esserlo successivamente in un'altro luogo. Il moto di un punto non lungo fissi per una serie di punti successivi opera per una linea. Ora è chiaro che i corpi possono muoversi e giungere nei medesimi punti, senza però passare per gli stessi intermedii e senza descrivere le medesime linee. Se per es. la linea percorsa in volta che si rapporta ai punti di partenza e di arrivo, l'altro può descrivere tutte le linee curve che possono avere le stesse punti. Il moto distinguesi adunque oltre la natura della linea percorsa dal corpo in dal mobile in rettilineo e curvilineo.

Quindi il moto evidentemente non è determinato da 2 punti dove parte e dove arriva il mobile. È necessario adunque conoscere ancora la via che esso percorre; oppure bisogna conoscere in qual maniera si trova il mobile in un dato tempo, e la lunghezza della linea descritta in un dato istante all'altro. E da questi elementi da si può ricavare il rapporto del tempo in cui fu descritta una certa linea alla lunghezza della medesima. La lunghezza di una linea percorsa da un corpo prende il nome di spazio.

Dalla considerazione del rapporto dei successivi spazi ai tempi in cui furono descritti nasce un infinità varietà di moti. Quando questo rapporto è costante cioè a dire che per a qualunque tratti di tempo gli spazi percorsi sono ad esso proporzionali il moto si dice uniforme. Ma quando a successivi tratti di tempo eguali corrispondono spazi sempre ineguali il moto si dice vario. Quando gli spazi

descritti in ugualissimi istanti di tempo vanno col tempo crescendo il moto dicesi accelerato, ritardato allorchè tali spazi vanno decrescendo. È manifesto che il moto accelerato si è il moto ritardato appartengono allo stesso di moto vario.

Il moto uniforme o equabile ha luogo quando un corpo abbandonato dalle forze che prima esercitavano su di esso il loro potere conserva il suo moto in virtù della legge d'inerzia. Siccome non può il corpo dirsi esattamente mobile, l'intensità del movimento dee esser sempre la stessa. La grande velocità può esser più o meno grande, e qualunque sia si dirama pei rammemorati velocità.

Ora è chiaro che se altrove 3 mobili dei quali uno con moto uniforme percorra 3 metri, nello stesso tempo due 2° ne percorre solo 2, ed il 3° 1 con moto non equabile, l'intensità del moto del 1° corpo sarà doppia, e quella del 2° sarà doppia di quella dell'ultimo. La misura adunque dell'intensità del moto è della velocità si desume dallo spazio che tal moto fa percorrere al mobile in una data unità di tempo. Per questa unità di tempo si prende ordinariamente il secondo, e per unità di misura di lunghezza, il metro; conchè l'unità di velocità sarebbe in questo caso quella che farebbe percorrere ad un corpo un metro in un minuto secondo.

Nel moto equabile la velocità è adunque costante nel moto vario è varia. Nel moto accelerato l'intensità cresce continuamente, decresce nel moto ritardato. L'accrescimento o decremento di velocità in questi moti succedono ordinariamente per una forza costante che è nella direzione del moto nel 1° caso e in direzione contraria nel 2°. e che agisce nel corpo qualunque sia la sua distanza dal centro dove risiede tal forza. L'accelerazione e ritardo del moto

si fa poi tanto più rapidamente quanto più grande è la forza acceleratrice o ritardatrice.

Ma egli è chiaro che se un corpo muovesi con moto vario secondo che istante accelerato o ritardato si volga la forza acceleratrice o ritardatrice, il corpo sciolto da essa conserverà nel successivo moto la velocità che aveva in quell'istante in cui fu tolta la forza su di lui agente, e per conseguenza il movimento equabilmente. La spazio percorso da esso con questo moto equabile nell'unità di tempo sarà dunque misura della velocità che esso aveva nel suddetto istante. Con questo mezzo si giunge a misurare la velocità del moto vario in ogni istante, supponendo che è quella che conserva ove si tolgano in quell'istante tutte le forze acceleratrici o ritardatrici.

Se i cenni esposti tutto ciò che appartiene alle suddette Nozioni preliminari, passiamo ora di proporle nella teoria.

(Venturoli, Elementi di Meccanica Vol 1° Capo 1°. Poisson Mécanique §§. 1.2.3.4.10.)

LEZIONE IV.

La Meccanica non considera le forze nella intima loro natura, bensì solo in que ragioni del punto d'applicazione, della direzione, della durata, ed azione loro, e dell'intensità delle medesime – Modo di valutare i suddetti elementi – Coordinate polari e rettangole – Angolo di una retta con assi di rette.

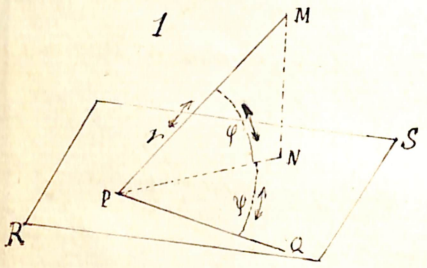
OGNI causa manifestandosi per i suoi effetti, la ragione di una forza agente sopra un corpo si fa palese quando un corpo è messo in movimento, se era ripulso, o se avversi il suo moto è alterato in velocità o in direzione, per grado finito o infinitesimo o eziandio distrutto. Per es. quando vediamo un corpo descrivere della linea retta da descrivere poi seguirne per un certo tratto una altra, poi una terza in modo da percorrere un poligono, è forza concludere che le cause di queste deviazioni sono intermittenti o agiscono ad intervalli finiti. Ma quando vediamo un corpo muoversi secondo una linea curva, la direzione del suo moto essendo modificata ad ogni istante, dee tenersi per fermo che la causa che produce tale continua deviazione agisce per gradi infinitesimi, o meglio ad ogni istante fa sentire al corpo tutta la sua azione. E questa osservazione vale ancora pel moto accelerato o ritardato in modo continuo. Fa di mestieri ancora che quando un corpo si muove unicamente in virtù della sua energia, non essendovi causa che ne alteri il moto in velocità o in direzione, esso serbi il suo moto rettilineo ed equabile.

Siamo ormai giunti alla Meccanica considera il moto nelle sue cause, esprimiamo queste da noi conosciute forze come cause del moto nella più, nella meno. Le cause del moto ricercate si devono poi astrarre dall'intima natura delle cose stesse, e dalla loro origine; le quali cose sono appartenenza della Fisica - Noi conosciamo nella forza muscolare, la forza dell'attrazione universale e molecolare, dell'elasticità dei gas e vapori e dei solidi, del calorico ecc. ecc. Ma sono elleno queste forze di natura distinta? o appartengono ad una sol fonte? e sono solo una modificazione di una causa agente universale? i pianeti che girano equal modo? Di questo cose la Meccanica non dà compenso e declina alla Fisica l'incarico di comprendere tali questioni. Parlerà a noi sapere dai Fisici siamo ridotte a 5 forze qualche che si possono supporre procedenti dalla materia inorganica e sono; 1° la gravità pesa universale; 2° l'azione capillare; 3° la forza espansiva del calorico; 4° la forza elettrica; 5° l'azione dei corpi nella luce. Oltre a queste riconosciamo le forze procedenti dalla natura organica.

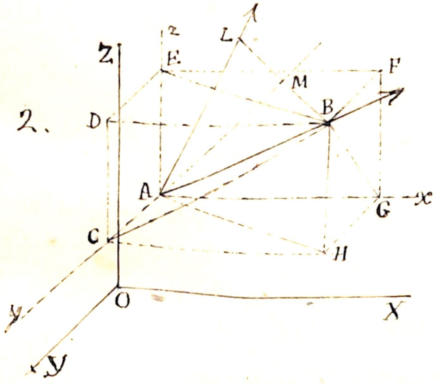
Nella forza considerata come causa di moto bisogna avere i Meccanici dei seguenti tre elementi; 1° il punto d'applicazione; 2° la direzione della forza; 3° la durata della sua azione; 4° l'intensità dell'azione medesima.

(A) Punto d'applicazione. E' il punto del corpo sul quale la forza esercita direttamente la sua azione. Questa può per mezzo dei legami che hanno unito il sistema delle molecole si trasmette a tutte le parti del corpo. Bisogna avvertire di dover determinare nelle ragioni più frequenti o numerosamente i punti di

applicazione delle forze. Graficamente ciò si ottiene colla Geometria descrittiva usando del metodo delle proiezioni. Numericamente poi si fa riferendo questi punti a 3 assi ordinariamente fra loro rettangolari, talora obliqui: nel 1° caso ogni punto si determina dalle distanze ai 3 piani coordinati, nel 2° dalle coordinate con rette parallelamente agli assi. È noto che per la completa determinazione bisogna avere eguali i segni delle coordinate. Alcuna volta si usa determinare il punto d'applicazione per mezzo delle coordinate polari nello spazio, la quale determinazione si usa fare così: Sia M il punto a determinarsi, RS un piano qualunque noto, P polo di proiezione noto, PQ una retta pure nota. Da M abbasso una perpendicolare al piano RS il cui piede sia N: incontro PN. Ove si conosca la lunghezza PM = r gli angoli φ e ψ, M sarà determinato nello spazio: difatti per costruire M basterebbe fare l'angolo QPN' = ψ su PN innalzare una piano ortogonale a RS di un punto pure l'angolo N'PM = φ e prendere poi PM = r: è rimpiazzando ancora convenzione il segno degli angoli φ e ψ per determinare completamente M. Ora ψ è positivo nel senso indicato dalla freccia della figura fino a 180° negativo dalla parte opposta. Così pure φ è positivo sopra il piano RS, negativo sotto, e l'angolo di φ è PN. Il segno di r sarà sempre positivo, la sua direzione quindi abbastanza indicata dagli angoli ψ e φ e dal loro segno.



(B) *Direzione.* - La direzione di una forza si intende quella retta lungo cui essa tende a muovere il suo punto d'applicazione secondo un verso determinato. Poi tende a muovere, e non muove perchè talora è diversa la direzione del moto da quella della forza: come per es. nel piano inclinato, essendo noto che ogni forza tende a far scorrere una retta al suo punto d'applicazione. La determinazione grafica della direzione di una forza si può fare seguendo il metodo delle proiezioni. Ma numericamente si può meglio fare determinando gli angoli che tal direzione fa coi 3 assi coordinati. Sia AF la direzione di una forza riferita ai 3 assi OX, OY, OZ; e per A condurremo 3 rette Ax, Ay, Az, parallele a questi assi, gli



angoli che AB farà con quelle rette saranno eguali agli angoli rispettivi che fa con gli assi delle coordinate. Chiamiamo BAx, α, BAy, β, e BAz, γ. Se prendiamo sulla retta la lunghezza $AB = 1$ e dal punto B abbassiamo le 3 coordinate BH HG e AG saremo facendo $AG = x$, $AC = HG = y$ $HB = AE = z$ sarà $x^2 + y^2 + z^2 = AB^2 = 1$ Inoltre si ha $x = AB \cos\alpha$; $y = AB \cos\beta$ $z = AB \cos\gamma$ ossia $x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$, $z = \cos\gamma$ Dunque sarà

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (1)$$

La qual formola dimostra che dati 2 angoli per es α e β non corrono più che 2 valori per γ: cioè $\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$, dei quali uno è supplemento

dell'altro. Quando la forza è diretta nel senso della freccia della figura si prende il segno +, quando in senso contrario il segno −. Quando si hanno 2 forze AB AL applicate allo stesso punto e si hanno gli angoli che fanno coi 3 assi si può trovare l'angolo che fanno fra loro. Si immagini questa trasportata in A di l'origine delle coordinate e prendiamo $AB = AL = 1$. Siano $\alpha' \beta' \gamma'$ i 3 angoli LAX, LAy, LAz, ed x', y', z' le coordinate del punto L. Nello stesso modo che per B dai triangoli rettangoli BAG, BAE, BAC si ebbe $x = \cos\alpha$ $y = \cos\beta$, $z = \cos\gamma$ si troverà parimenti $x' = \cos\alpha'$, $y' = \cos\beta'$ $z' = \cos\gamma'$; e come il parallelepipedo ~~rettangolo~~ $BDEFGHCA$ ha dato $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ così avrà pure $\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$. Ma la distanza fra i punti B, L è (Geom. a 3 dimensioni) $BL = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$; sostituendo i valori delle coordinate loro si troverà $BL = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}$

$$BL = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' + 2\cos\alpha\cos\alpha' + 2\cos\beta\cos\beta' + 2\cos\gamma\cos\gamma'}$$

ossia $BL = \sqrt{2 - 2(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')}$.

Ma θ era θ l'angolo cercato LAB sarà $BL = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta = \sqrt{2 - 2\cos\theta}$.

Paragonando i 2 valori di BL avrà $\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$.

Che 2 degli angoli α, β, γ bastino a determinare la retta AB è manifesto considerando la retta AB come la intersezione di due coni aventi i vertici in A ed in cui le generatrici facciano coi tre assi gli angoli α e β o β e γ o γ e α. Queste 2 coni si intersecano secondo 2 rette e quindi la soluzione o le rette loro intersezioni saranno due. Il 3° cono toglierà i 2 alla secondo AB quando si determini l'angolo della sua generatrice coll'asse suo

per mezzo della formola (1) Gli angoli per cui fa la retta AB coi 3 assi si possono esprimere servendo le equazioni della retta. Siano $y = ax + b$ $z = a'x + b'$ le 2 equazioni della retta AB (sommando che 0 sia l'origine) se immaginiamo trasportata in A l'origine delle coordinate le eqn si ridurranno a $y = ax$ $z = a'x$ se si prende $AB = 1$ le coordinate di B già trovate saranno dovendo soddisfare alle eq. della retta sarà $\cos\beta = a\cos\alpha$ $\cos\gamma = a'\cos\alpha$. Ecco l'espressione che esiste fra i 3 angoli in funzione dei coefficienti o dei parametri dell'eq. sostituendo poi nell'eq (1) questi valori di $\cos\beta$, $\cos\gamma$, trovasi.

$1 = \cos^2\alpha(1 + a^2 + a'^2)$ ossia $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+a'^2}}$ e poiché $\cos\beta = a\cos\alpha$ sarà $\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+a'^2}}$; e $\cos\gamma = \frac{a'}{\sqrt{1+a^2+a'^2}}$

(C) Durata dell'azione. Si misura la durata dell'azione di una forza paragonandola ad una durata nota per es a quella di un secondo sessagesimale di giorno medio. Non è qui il luogo di esporre la cosa sia il giorno medio, sia come si faccia a verificare gli strumenti che danno questa misura.

(D) Intensità. Che cosa sia l'intensità dell'azione di una forza, e come se misurare si dirà nella seguente lezione.

(Leroy Analisi applicata alla Geometria a 3 dimensioni SS 27-8, 31-2-4. Poisson Meccanica SS, 1, 6, 7, 8, 9.)

LEZIONE V.

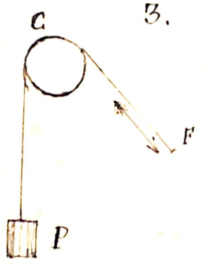
Intensità delle forze - Sua misura statica per mezzo dei pesi - Misura dinamica delle forze - Lemmi sulle forze eguali, sulle forze proporzionali alle masse, alle velocità. Teorema sulla proporzionalità delle forze alle quantità di moto da esse prodotte - Formola che se ne deduce pel caso in cui sia unità di forza quella che nell'unità di tempo comunica l'unità di velocità all'unità di massa.

DICESI intensità di una forza l'energia colla quale essa opera nel suo punto di applicazione. Ignorando noi l'intrinseca natura e il modo di operare delle forze, non proviamo misurare direttamente l'intensità, perchè non conosciamo di una forza che dagli effetti che le vediamo produrre, dalla grandezza di questi effetti desumiamo la misura dell'intensità delle forze. Ora l'effetto di una forza è o di distruggere l'azione di altre forze facendo loro equilibrio (effetto statico) oppure produrre un qualche movimento (effetto dinamico). L'intensità adunque di una forza si può avere o misurando le forze a cui fa equilibrio, o misurando il moto che produce; onde nascono la misura statica e la misura dinamica delle forze.

Quando una forza fa equilibrio a una o più forze distrugge di questa l'azione per mezzo della pressione o della tensione che fa soffrire al corpo cui si applica. Ora è chiaro che se una forza è capace di far equilibrio a una sopra altra, l'intensità dell'azione sua dee esser eguale all'intensità dell'azione di tutte le altre riunite cui fa equilibrio. Conosciuta l'intensità di queste sarà conosciuta quella

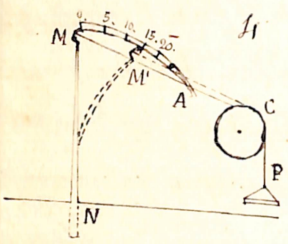
della forza in questione. Nel che è da notare, che 2 forze diverse eguali sempre
della stessa intensità sempre eguali della stessa natura.

Le forze in questo senso si misurano paragonandole a delle forze che noi conosciamo, e che noi ben profondo fra di noi. Supponiamo per es che a un peso P prodotto dalla carrucola C venga applicata la forza F tale, che possa fare equilibrio a questo peso, e impedirgli appena di salire. Se il peso P sia di un chilogramma diremo la forza F eguale forza di un chilogramma. Così se diremo forze di un chilogramma tutte quelle che saranno eguali di per equilibrio alla forza F. Ma se supponiamo che il peso P sia di 2 Chil. noi potremo immaginare attaccate alla fune 2 forze di un Chil. respettivi. Queste 2 potranno evidentemente



fare equilibrio al peso P. Se ora si abbia una 3ª forza che di per se equilibri P, quella forza sarà eguale alle 2 forze di un Chil. insieme prese e si dirà forza di 2 Chil. doppia di quanto delle prime. E procedendo avanti noi potremo immaginare tante forze grandi di un Chil. ed una forza alla loro somma equivalente, avremo così una forza di un N.° qualunque di Chil. Avremo per misurare una forza qualunque si può misurare a quanti Chil. può far equilibrio, sostituendo al peso P un piattello (dal cui peso faremo ora astrazione e lo supporremo nullo); applicando alla fune la forza da misurarsi, e mettendo nel piattello tanti Chil. grandi bastano per aver equilibrio. La forza sarà di tanti Chil. grandi se ne trovano nel piattello al punto d'equilibrio.

Questo metodo ha però l'inconveniente d'esser lungo incommodo, e talvolta anche pericoloso. È meglio poter subito vedere all'istante il N.° di chil. necessarii a stabilire l'equilibrio che metterli uno alla volta. Il perciò usare una molla, come MN infissa in un punto orizzontale e tale da prigionia l'estremità M percorra una curva MA disposta a modo di quadrante. Quando sul piattello P applicato per una carrucola C all'estremità M non v'ha peso, (si suppone il piattello imponderabile) la molla sia nella sua posizione ordinaria MN; ma se si grava d'un peso ad es. di 10 chil. essa si curverà per es in MM': notisi il chil. sul quadrante MA dove l'estremità M della molla è venuta cioè in M'. Si mettano successivamente, 1. 2. 3. 10 chil. sul piattello e si notino le cifre corrispondenti sul quadrante. È chiaro che se dopo aver gravato P si applica alla fune una forza che faccia venir M fino al grado 15 la forza sarà 15 chil. poichè forze eguali fanno equilibrio a elasticità eguali della molla, e non supponiamo che a elasticità eguali corrispondano gradi o curvature eguali. In questo modo per misurare una forza data applicata in luogo di P e vedere fino a qual grado fa giungere l'estremità M della molla. Lo strumento così descritto offre l'abbozzo di un dinamometro (δύναμις, potenza, μέτρον misura).



Misura dinamica delle forze. La misura dinamica si desume dagli effetti dinamici o dalla grandezza dei moti prodotti dalle forze. Per giungere a spiegare la formola con cui si esprime questa misura bisogna premettere alcuni teoremi.

LEMMA I. Due forze applicate allo stesso corpo, o corpi di massa eguale, danno egual tempo impiegano ad esse eguali gradi di velocità sono eguali. Questo principio è evidente, ad effetti eguali dovendo corrispondere eguali intensità delle forze.

LEMMA II. Se una applicata ad una massa di uno dei corpi precedenti, ed applicate 2 forze eguali alle precedenti a muover questa massa, è dato che ciascuna forza impiegherà della sua metà di massa velocità eguale a quella della massa semplice mossa da una forza sola. Ora 2 forze hanno insieme una intensità doppia dell'intensità di ciascuna ed eguale all'intensità di una sola doppia; dunque se 2 forze impiegano a 2 masse una doppia dell'altra velocità eguali in tempi eguali tali 2 forze stanno fra loro come le masse cui sono applicate, cioè una sarà doppia dell'altra. Siccome di fatti una massa doppia dell'altra si possono fare da stesso fra loro in una rapporto qualunque, così provasi similmente il 2° lemma che è: se 2 forze applicate a 2 masse qualunque impiegano ad esse velocità eguali in tempi eguali, tali 2 forze stanno fra di loro come le respettive masse; e in scrittura algebrica se f sia la forza che muove la massa m, F quella che muove la massa M si avrà. $F : f :: M : m$. — (1)

LEMMA III. Se 2 forze applicate a 2 masse eguale impiegano alle stesse in tempi eguali velocità ineguali, tali forze stanno fra loro come le respettive masse velocità. Questo principio da alcuni è tenuto come evidente, dagli altri come un dato sperimentale. Lullerà se non può dare una spiegazione ripetendo da una forza doppia di un altra può scomporsi in 2 eguale a questa. Se le 2 forze sono applicate ad eguali masse ciascuna metà della 1ª imprime alla massa una velocità eguale a quella che la 2ª forza imprime alla sua; ora le 2 metà della maggior forza potendosi considerare come eguali indipendentemente l'una dall'altra segue da la velocità che risultano

doppia, quella velocità comunicata da una metà d'impressione da quella che la stessa massa acquistato per un'altra causa. Una forza doppia dee in conseguenza comunicare in egual tempo a quella massa una velocità doppia; e potendosi passare dal doppio al triplo, al quadruplo ecc cresca che se V è la velocità dovuta alla forza Q, e quella dovuta alla forza q spendo e massa e tempo eguali si ha. $Q : q :: V : v$. (2)

TEOREMA Due forze F, F' che applicate a 2 masse qualunque M, M' imprimono alle stesse in pari tempo le velocità V V' stanno fra di loro come i prodotti delle rispettive masse per le rispettive velocità. Per ciò dimostrare, supponiamo una 3ª forza Q la quale applicata ad una massa eguale a quella della 1ª forza imprima alla stessa una velocità eguale a quella della 2ª massa, cioè V'. Paragonando questa forza colla 1ª sarà, $F : Q :: V : V'$. Paragonando poi la forza Q con F' avremo. $Q : F' :: M : M'$. Moltiplicando termine a termine le 2 analogie si ha. $F : F' :: MV : MV'$. (3)

Apprezziamo ora per unità di forza quella che all'unità di massa comunica l'unità di velocità, e facciamo M, V' eguali a queste unità, sarà pure F eguale all'unità di forza; ed allora si avrà $F : 1 :: MV : 1$. da cui $F = MV$ (4) la quale formola dà la misura dinamica delle forze quando F, M, V si valutano secondo le dette unità. Il prodotto della massa per la velocità si dice quantità di moto.

Per misurare dinamicamente una forza la si applica successivamente ad una massa per 1", poi si toglie la forza e si misura la velocità acquistata dalla massa; calcolando e massa e velocità secondo le loro unità e la forza secondo l'unità che in 1" imprime l'unità di velocità all'unità di massa, avremo in MV l'espressione dell'effetto dinamico della forza

Supponiamo ora che la forza capace di imprimere in 1" la velocità V alla massa M, si applichi ad una massa eguale ad M incontrastata con velocità eguale a V; questa forza ritarderà ogni più il moto, finchè dopo 1" d'azione esso si trovi tutto distrutto, se la forza operasse in senso contrario al moto. Epperò nei termini prudenti si potrà ai corpi imprimere, produrre ecc sostituendo il verbo distruggere e si avranno con' altrettanti proposizioni valevoli eguardo a dare la misura dinamica delle forze, desunta dalla quantità di moto che le stesse possono distruggere nell'unità di tempo

(Poisson Meccanica SS 8, 120, 121)

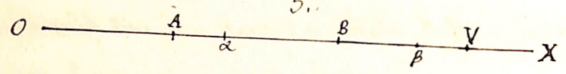
LEZIONE VI

Moto assoluto e relativo – Moto relativo di 2 punti percorrenti la medesima retta con moto uniforme – Teorema sul parallelogrammo delle velocità – Date in grandezza e in direzione le velocità assolute di 2 punti nello spazio trovarne la velocità relativa – Definizioni risultanti e componenti.

OLTRE alle distinzioni del moto fatte nella Lez III rispetto allo spazio e al tempo un'altra se ne può fondare sulla relazione dei corpi movibili rispetto ad altri punti. Infatti il moto si può egualmente definire: variazione continua di posizione rispetto a uno o più punti. Ora se questa variazione si riferisce ad un punto fisso nello spazio, questa variazione è assoluta e si dice moto assoluto; moto relativo invece quando i punti cui si riferisce il moto non sono stabili, ma hanno già essi un moto comune al mobile che si considera così per es se la città di Torino fosse fissa nello spazio, anche se essa allontanasse 10 miglia per es verso sud, avrebbe compiuto realmente 10 miglia di moto assoluto nello spazio. Ma siccome la città di Torino già assieme alla terra ogni giorno sull'asse di questa. Di più la terra muovesi descrivendo un'ellisse attorno al sole, più ancora il sole è oggi provato non esser fisso, ma aver un certo moto di traslazione comune col sistema dei pianeti che lo circondano verso una certa stella (α. d'Ercole) è evidente che quel moto di 10 miglia non è fatto da relativamente alla città di Torino, e che in realtà quell'uomo ha descritto nello spazio una curva di grandezza e complicazione per oggi

~~indeterminabile~~ ~~complicazioni~~. Poiché non possiamo realmente in natura determinare un punto fisso nello spazio è diremo che tutti i moti da noi osservati sono relativi.

5.



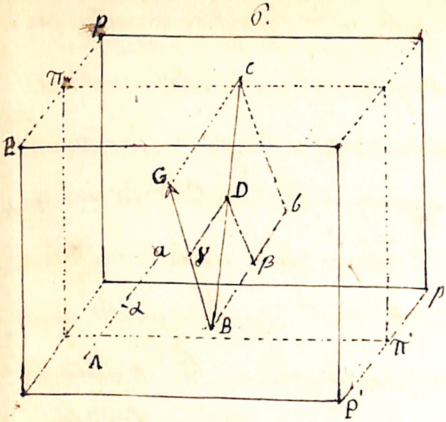
Consideriamo un caso assai semplice di moto relativo

Sia il punto O un punto che supponiamo fisso, o consideriamo come tale, e siano A, B due punti percorrenti la retta OX con moto uniforme, siano le rispettive velocità in un istante di tempo a, b. I moti di A, B considerati rispetto ad O sono assoluti; ma se consideriamo il movimento di B rispetto ad A questo sarà moto relativo. Supponiamo la velocità b maggiore di a se in un istante di tempo A arriva dello spazio $\alpha = A\alpha$, B dello spazio $b = B\beta$, B si sarà allontanato da A di uno spazio $\alpha\beta - AB = B\beta + \alpha B - A\alpha - \alpha B = B\beta - A\alpha = b - a$. Il moto di B dunque rispetto ad A è moto uniforme, e in un istante la velocità di questo moto relativo è $b-a$. Che se vogliamo considerare il moto di A rispetto a B troveremo esso essendo uniforme e di velocità $a-b$, che nella nostra supposizione essendo negativo, indica che A si allontana da B verso C nel suo moto relativo.

La quel relazione di moto si può considerare essendo sotto un altro punto di vista. Un movimento si dice comune a più punti o ad un sistema di punti quando quei corpi da quel moto animati come, se quei punti rimanendo nella loro posizione relativa rispettiva, la forza che lo causava fosse distribuita equabilmente sopra ciascuno di essi, ed essi percorressero linee eguali con velocità eguali. Ma quando quei punti cambiano di posizione rispettiva, oltre al moto comune a tutti, avranno essendo loro

moti propri. Così tutte le cose contenute nella superficie e unite la terra hanno comune il moto di rivoluzione intorno al sole; queste cose hanno poi loro moti propri che primo variano all'infinito i movimenti assoluti. Premesse queste ragioni, scomponiamo la velocità b in una eguale ad a ed in un altra eguale a $b-a$. È chiaro che se avesse di sua velocità solo la punta a non vi sarebbe tra B ed A moto respettivo, perché sarebbero fra loro sempre la stessa distanza e posizione respettiva. Ma B animato dalla velocità $b-a$ si allontana da a in sua virtù, perché l'altra punta a è comune con A; dunque la velocità respettiva è $b-a$, e la velocità ~~relativa~~ intiera o assoluta è $a+(b-a)=b$. Che se il moto di A e di B non volesse riferirsi né ad A, né a B, ma ad un 3° punto V che ammetta uniformemente per OX colla velocità v, le velocità di A e B respettive V sarebbero $b-v$ ed $a-v$. La differenza di queste due velocità sarebbe pure ancora la velocità respettiva di A e di B cioè $b-a$ od $a-b$, secondochè si considera come punto principale A o B.

Passiamo ora a considerare un caso di moto relativo alquanto più complicato. Immaginiamoci in un piano PP' 2 punti dei quali uno A sia fisso nel piano, cioè conservi sempre la stessa relativa posizione verso tutti i punti del piano; l'altro invece B animato da una forza capace di farlo descrivere nell'unità di tempo la linea rappresentata in grandezza e direzione da BG. Sarà BG il moto di B relativo ad A nell'unità di tempo. Si immagini ora che il piano PP' si trasporti parallelamente a se medesimo e senza



mai esce dal piano in cui esso è contenuto nella posizione pp' nell'unità di tempo, e vediamo quel sarà il moto assoluto del punto B se si concepisca che esso abbia cominciato a muoversi su BC, mentre pp' incominciava a muoversi verso p'p' con moto uniforme, in modo che tutti i suoi punti descrivessero rette eguali e parallele a Pp, P'p'. Il punto A avrà descritto la Aa eguale e parallela a Pp; e similmente il punto B se avesse dovuto star fisso, si sarebbe trovato in b per cui Bb eguale e parallela alla stessa Pp. Ma se il piano fosse stato fisso, B nell'unità di tempo sarebbe giunto in G: ora G in cui con tutto il piano effondosi in tal tempo appunto portato in c, segue che il risultato dei movimenti combinati che avrebbe avuto a fare B nelle 2 direzioni BG, è stato di portarsi in c. Il qual punto c si ottiene compiendo il parallelogramma sui 2 lati BG, Bb. Il risultato adunque che un punto B sollecitato da 2 forze che tendono a fargli descrivere nell'unità di tempo gli spazi BG, Bb, per l'azione combinata di questi spazi si trova alla fine del tempo stesso in c estremo della diagonale del parallelogramma costrutto sulle due linee BG, Bb.

Ma oltre in tutto il tempo per cui ha durato il moto, il punto B è giunto in c, descrivendo la diagonale Bc del parallelogramma. Ripetti se dividiamo in 2 l'unità di tempo, dopo mezza unità il piano pp' si troverà

in $\pi\pi'$ avendo eguale punto descritto una retta eguale e parallela a $P\pi$, $P'\pi'$ che sono eguali a $\frac{P'p'}{2}$. $\frac{Pp}{2}$. Adunque dopo mezza unità di tempo B dovrebbe trovarsi in β (per cui $B\beta = \frac{1}{2}BG$), se si considera solo il moto del piano; e se si considera solo il moto che la fa verso G nello stesso tempo B dovrebbe trovarsi in γ (per cui $B\gamma = \frac{1}{2}BG$). Per ciò dunque è detto compiuto il parallelogramma $B\gamma D\beta$, si troverà in D. Ora io dico che D è sulla diagonale Bc. Infatti per costruzione Gc, γD sono ambi parallele a BG; dunque saranno parallele fra di loro (Geometria) In conseguenza gli angoli BGc $B\gamma D$ come corrispondenti saranno eguali. Inoltre $\gamma D = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}GC$ per ipotesi e così pure $B\gamma = \frac{1}{2}BG$, i 2 triangoli BGc, $B\gamma D$ comprendendo angoli eguali fra lati proporzionali saranno simili, e l'angolo γBD sarà eguale a GBc. Le 2 linee BG BD dunque si sovrapporranno e D in conseguenza si troverà nella diagonale. come era a provarsi.

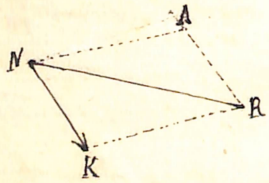
Ora se invece di dividere l'unità di tempo per mezzo si divida nel rapporto qualunque $\frac{m}{n}$, si proverebbe similmente che GC: γD:: BG: γB :: m+n : m. E riuscirebbe egualmente facile a provare, esser eguali gli angoli γBD, GBC. Considerando qualunque istante di tempo, potendosi dimostrare che il punto mobile è sulla diagonale Bc, forza è concludere che esso arrivi da B in C descrivendo la retta BC. E la descriverà con moto uniforme, perchè se si è divisa l'unità di tempo nel rapporto $\frac{m}{n}$, essendo $\frac{GC}{\gamma D} = \frac{BG}{\gamma B} = \frac{m+n}{m}$ sarà eziandio $\frac{Bc}{BD} = \frac{m+n}{m}$ Gli spazi stando fra di loro come i tempi qualunque siano m, n: il moto del punto B per Bc dee dirsi uniforme.

Viceversa se fosse dato il piano PP e la retta BG che da esso descri-

descriverebbe il punto B nell'unità di tempo, e si domandasse secondo qual retta dee muoversi ogni punto di esso piano, perchè in virtù dei 2 moti combinati B dopo l'unità di tempo dovesse trovarsi in C dato di posizione la risposta non sarebbe difficile a farsi. Basterebbe condurre CC e per B, Bb ad essa eguale e parallela. Il piano dovrebbe muoversi in modo che B descrivesse Bb e gli altri punti delle rette eguali e parallele a Bb.

Sopra il moto dei punti A e B si può ora fare un osservazione, ed è che il movimento del piano essendo comune ai 2 punti A e B, il moto relativo di B rispetto ad A continua ad esser BC. Questo dà la chiave della risoluzione d'un problema che altrimenti sarebbe assai difficile. Poichè A e B movendosi nello stesso tempo uno per Aa, l'altro per BG, il moto relativo BC di B verso A si ottiene decomponendo il moto BG nei 2 che lo hanno prodotto, Bb = Aa e Bc. Il moto Bb essendo eguale ad Aa, B per cagion di questo non ha rispetto ad A ~~l'altro per Bc il moto relativo BC di~~ alcun moto relativo; tutto il moto relativo BG è dunque l'altro lato del parallelogramma. BGcb. Il problema che da questa considerazione riceve la sua soluzione è il seguente.

7.



Due punti sono animati da 2 forze e che loro fanno percorrere nell'unità di tempo le rette rappresentate in grandezza e direzione da MV, NR. Le quali possono essere o non essere nello stesso piano. Si tratta di determinare la velocità relativa

di N rispetto ad M.

Se io conduco per N per NA eguale e parallela a MV, poi unito A con R tiro NK eguale e parallela ad AR io posso ben ripetere detto quello da me detto, che il moto NR risulti dalla combinazione dei due moti NA, NK. cioè delle 2 forze capaci di far descrivere nell'unità di tempo a N le rette NA, NK. Ora il moto NA essendo eguale e parallelo a MN non avrà parte al moto relativo, perchè 2 mobili che per NA, MV si muovessero con moti impressi di eguale velocità, conserverebbero fra loro la stessa mutua posizione. Adunque il moto relativo di N rispetto ad M sarà rappresentato in grandezza nell'unità di tempo da NK. Il problema riceverebbe un applicazione pratica, quando per es i punti mobili fossero 2 navi in mare.

L'operazione fatta in questo problema e che spesso occorre nella Meccanica, di decomporre cioè un momento in 2 altri, si chiama decomposizione o risoluzione delle velocità o dei momenti, si chiama poi composizione delle velocità o dei momenti l'operazione per appoggiandosi al suddetto teorema riunire 2 movimenti in un solo. Quindi le 2 rette rappresentanti le velocità che imprimerebbero le 2 forze agenti secondo i 2 lati contigui del parallelogramma si chiamano componenti; e velocità risultante quella espressa dalla diagonale del parallelogramma.

Adottando queste espressioni il teorema del parallelogramma delle velocità appunto questo enunciato: La risultante di 2 velocità componenti

applicate ad un punto equivalgia in grandezza e direzione la diagonale del parallelogramma fatto sulle 2 volte rappresentanti le componenti.

(Venturoli 155 12. 13. 14. Poisson Méc. 55. 24-5-6-7-8)

LEZIONE VII.

Applicazione della composizione dei movimenti, alla spiegazione dell'aberrazione della luce – Velocità della luce e della terra – Fenomeni analoghi a quello d'aberrazione spiegati colla composizione dei movimenti – Determinazione dell'angolo d'aberrazione delle fisse, e forma delle curve d'aberrazione.

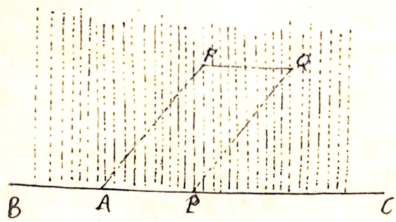
FINO dal 1728 avea BRADLEY (astronomo inglese nato nel 1692 morto nel 1762) notato in tutte le stelle fisse un movimento generale, che variava seguendo una certa legge secondo le posizioni delle medesime sulla sfera celeste. Esse descrivevano un ellissi il cui asse maggiore avea di diametro apparente circa 20", mentre l'altro era di grandezza variabile. Dopo molte ricerche, finalmente nel 1728 venne a provare che questo moto è puramente apparente, ed è dovuto alla combinazione dei movimenti della terra e della luce stellare. Siccome questa spiegazione non è che un applicazione dei principii stabiliti pare pregio dell'opera non tralasciarla.

La propagazione della luce non è istantanea e la sua velocità non è infinita; è però grandissima. Nel 1675 ROMER (astronomo danese nato nel 1644 morto nel 1710) avea concluso dall'osservazione degli eclissi

dei satelliti di Giove (per un procedimento che vedi a quel luogo di riferire) che la velocità della luce era tale da poter percorrere in 10 minuti di tempo il semigrand'asse dell'orbe terrestre, calcoli ed osservazioni più esatte diedero poi a vedere, esser la velocità della luce alquanto maggiore e il tragitto del semigrand'asse da essa operarsi in 8', 13", 3. Ora questo semigrand'asse dell'orbe terrestre essendo di Chil. 153 983 970 se ne conclude la velocità della luce, o lo spazio da essa percorso in 1" di tempo esser di 310 998 Chil. Che se ricerca la velocità della terra in un secondo, con cui trascorre nell'orbita sua, troveremo dividendo la periferia di quella che è più di 990 milioni di Chil. per 31 558 149", 6 di tempo sidereo (che tanti appunto se ne contengono nell'anno sidereo, il quale è il tempo impiegato dalla terra a ritornare nello stesso punto dell'orbe 365 g 6 h 9' 9", 6) che la terra corre nell'orbe suo 30, chil. 338 in 1", ossia che la sua velocità è di 30, chil. 338. Paragonando la velocità della terra a quella della luce si avrà per rapporto della 1ª alla 2ª $\frac{1}{10187}$.

Premesse queste cose, incominceremo a dare spiegazione di alcuni altri fenomeni più volgari che quello dell'aberrazione della luce, meno comprendenti una affatto simile.

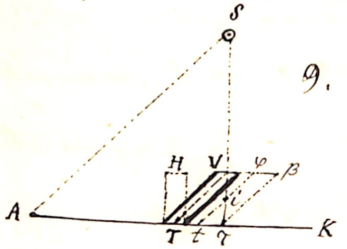
8. Siano le linee punteggiate verticali della seguente figura serie di gocce d'acqua cadenti in una pioggia a tempo tranquillo e regolare. Sia un uomo A che corra nella strada BC mentre piove colla velocità AP



cioè descriva camminando in 1" la retta AP. Mentre egli è in A supponiamo che una goccia di pioggia F sia in tal posizione che con velocità = FP cada in terra dopo 1" di tempo con moto uniforme a cui dispiace. Arriva che l'uomo in A si troverà appunto in P a tempo a coglier nel viso o sul davanti la goccia F. Ma questa invece di sembrargli cadere verticalmente, gli apparirà cadere in una direzione obliqua quale PQ, cioè gli parrà che un vento gliela spinga contro. Ma siccome ad ogni momento si trovano delle gocce che hanno rispetto all'uomo la posizione che ha F rispetto ad A (perchè le gocce d'acqua se la pioggia è un po più forte si succedono senza posa nella stessa verticale e le file virtuali di pioggia sono vicinissime le une alle altre) segue che ad ogni momento cadranno non che una, una molte gocce sul davanti dell'osservatore, e tutta la pioggia gli sembrerà colta contro da gagliardo vento, mentre le sue parti posteriori non saranno per nulla bagnate. Questo risulta da ciò esperienza che facilmente ognuno può fare: vediamo come ciò si spiega.

Immaginiamo che la velocità di F cioè FP si scomponga in 2 velocità FA, FQ di cui la FQ sia eguale e parallela alla velocità AP dell'uomo. È evidente che la parte FQ di velocità non fa cangiare ad F per nulla la sua posizione rispetto ad A e la distanza tra F ed A sarebbe costante. Ma FP oltre alla velocità FQ che F ha comune con A, si compone ancora della velocità FA. che è la velocità di F rispetto ad A; Dunque F. parrà cadere ad A nella direzione FA, e così tutte le gocce di pioggia che saranno nel corso del punto F poichè veramente il moto di F rispetto ad A diventa FA. E siccome quando la goccia percuote l'osservatore questo trovasi venuto in P segue che F gli

parrà venire non nella direzione FP ma nella direzione QP facente con la verticale, per cui si fa il moto della pioggia l'angolo FPQ che ha per tangente la velocità dell'osservatore divisa per quella della pioggia. E se vorrà difendersene gli bisognerà tenere il paraqua inclinato alla verticale di quest'angolo nella direzione del moto. Si ha una sfera S che cade verticalmente sul piano AK con moto uniforme di velocità ST E si ha un tubo VT il cui fondo T parte col suo centro da A nello stesso tempo che il centro della sfera cadente parte da S e si muove egualmente uniformemente. —



9.

Supporremo per più semplicità che il raggio della sfera sia piccolissimo; e che nel tubo possa scorrere liberamente la sfera; si domanda quale inclinazione deve darsi al tubo perchè la sfera cadendo permuta direttamente il fondo del tubo senza toccarne le pareti.

È chiaro che se il tubo fosse verticale mentre il suo fondo giunge in T. S giungerebbe in V (per cui TV parallela ad AS) e mentre il fondo è in t, S giungerà in t: epperò cadrebbe fuori del tubo. E se parimente non avesse un'inclinazione conveniente, o cadrebbe fuori, o sugli orli del tubo, o almeno non precisamente nel centro del fondo, se non per qualche fortuita combinazione degli urti, che avendo sofferto S percotendo sulle pareti ne turberebbero il moto verticale. Ora l'inclinazione conveniente da darsi al tubo è secondo SA. Perchè ad ogni modo invece della goccia di pioggia, qui abbiamo un globetto; e invece di un uomo il fondo del tubo, ma la cosa è la medesima rotondamente. Il moto respettivo di S verso il fondo del tubo facendosi nella direzione SA, il corso del tubo dovrà accompagnare questa direzione. Allora quando S sarà giunto all'altezza

della bocca del tubo, vi entrerà; perciò quando appunto il fondo si trove-
rà in T, essendo TV parallela a SA si ha AT : ST :: AT : SV. E
quindi S sarà in 1' circa distante da terra della metà dell'altezza del tubo
T trovandosi questo in t, l'asse tv del tubo passerà per S': onde la sfera
trovandosi col centro sull'asse del tubo non lo toccherà da nessuna parte; e così
dicasi di qualunque posizione intermedia a V e T del corpo S. Finalmente
quando S cadrà in T, T pure si sarà trasferito in τ, e la percussione diretta
sul fondo avrà avuto luogo senza inconveniente e urto alcuno.

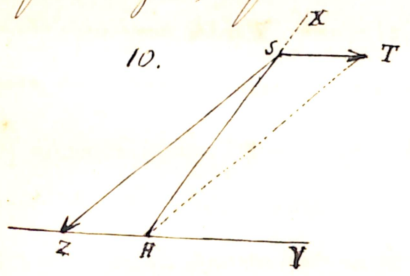
Se poi si concepisce che S sia la luce di una fiaccola o di una stella, che
percorra la lunghezza ST mentre un osservatore che guarda dal fondo del tubo
trasformato in telescopio, è chiarissimo che egli non vedrà la stella se non quan-
do avrà inclinato il suo cannocchiale in τB; e però invece di vedere la stella
nella direzione τS, essa gli apparirà secondo la linea τβ, deviata dalla verti-
cale dell'angolo Sτβ, che ha per tangente la velocità dell'osservatore, divisa per
quella della luce, e volta dalla parte cui tende il moto di quello.

Se adunque un osservatore A. percorre la retta AT in 1", portato dal
globo terrestre nella sua orbita (poniamo ben considerare AT come retta, non
essendo che di 30, chil. circa, che è un arco piccolissimo sull'immensa periferia
dell'orbe terrestre); mentre un raggio di luce partendo da una stella posta
in un piano ortogonale ad AT, cosicchè la direzione ST sia perpendicolare ad
AT, egli giunto in T non vedrà la stella in S ma nella direzione τβ, l'ango-
lo τβ di cui la vera posizione della stella data dalla posizione apparente, e di
cui la stella sembrò abberrare, dicesi angolo d'aberrazione. Ora a quest'angolo

sarà $\frac{1}{\text{tang } \alpha}$ eguale alla velocità della luce della stella divisa per la velocità del l'osservatore o della terra: Dunque tang α sarà per le fisse $\frac{29858}{310998} = \frac{1}{10,187}$; $\alpha = 20'',28$; Intendo di quelle fisse che si trovano nel piano perpendicolare alla direzione del moto dell'osservatore, o alla tangente dell'orbita terrestre nel punto ove si trova la terra al momento che si osserva.

Che se vuoi a cercare l'angolo d'aberrazione di una stella X, il cui lume cade nell'osservatore H facendo con la retta ZY che egli percorre in un secondo, l'angolo XHY non retto; se SH sia la velocità della luce in un secondo ZH quella dell'osservatore si scomporrà parimenti SH in ST eguale e parallela a ZH e in SZ. L'angolo d'aberrazione sarà SHT, Per calcolarlo, si ha chiamando α' quest'angolo, i quello di incidenza SHY, $\text{sen } \alpha' : \text{sen}(i+\alpha') :: ST : SH$.

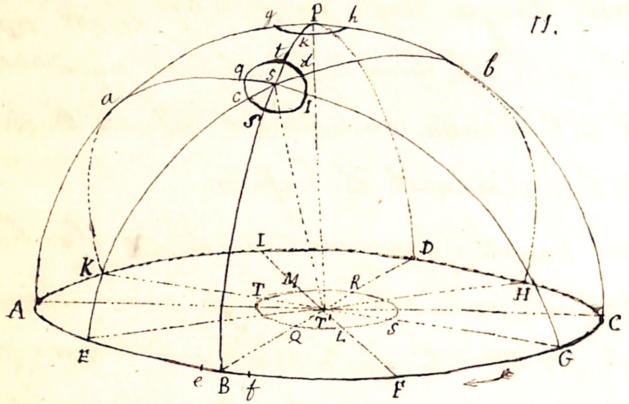
10.



Ora siccome nel rapporto $\frac{\text{sen } \alpha'}{\text{sen}(i+\alpha')}$ α' è piccolissimo rispetto ad i lo si può trascurare al denominatore e scrivere $\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } i} = \frac{ST}{SH}$ o ciò che è lo stesso $\text{sen } \alpha' = 20'',28 \times \text{sen } i$. Perlo incidenze oblique adunque l'angolo d'aberrazione è proporzionale al seno dell'incidenza. E si vede che quest'angolo è sempre contenuto nel piano che passa per la stella, e per la strada percorsa dall'osservatore, tangente all'orbe terrestre nel punto ove egli si trova.

Veniamo ora a vedere quali spostamenti debbano nel cielo subire apparentemente le stelle per causa di questo fenomeno, Rappresento con ABCD il circolo dell'ecclittica, cioè quel circolo massimo della sfera celeste, pel cui piano è tutto contenuto

l'orbe della terra: ABCDP sia l'emisfero boreale per es, P il polo boreale dell'ecclittica; sia AC la linea degli equinozi cioè quella linea che passa per il sole e per le 2 posizioni che ha la terra al momento degli equinozi, supponendo il moto della terra perfettamente circolare (ciò che porta un error insensibile). Per la grande distanza delle stelle bisogna considerare tutta l'orbita terrestre come ridotta al suo centro T': ed il circolo TRSQ non servirà che ad indicare le direzioni che ha il moto della terra quando passa per tali e tali meridiani. Perciò la terra si considererà come posta sempre in T'



II.

Supponiamo che la longitudine eliocentrica (distanza dalla linea AC in gradi osservata dal centro del sole) della terra sia in un determinato tempo, in cui si trova eguale all'angolo CT'F, così che la direzione del suo moto sia in questo caso parallela alla tangente in L al cerchio TRSQ ossia EH; questa retta sarà la tangente all'orbita della terra, per quel punto in cui nel tempo che consideriamo sarà la terra; e se sia S la stella di cui si vuole osservare l'aberrazione, da quel che si è detto l'angolo d'aberrazione sarà tutto contenuto nel piano passante per EH e per S: quindi i gradi dell'angolo già detto dovranno contarsi da S verso C e verso il sol circolo, secondo cui il piano passante per EH e per S taglia la sfera celeste.

Questo circolo passando per il centro T' della sfera sarà un circolo massimo, ed è quello segnato ET'Hbs

Se la terra movendosi nella direzione indicata dalla freccia sulla figura, della linea AC degli equinozj, è passata nella ET', la direzione del moto suo sarà da T' in E perpendicolarmente a T'E, e'l polo P e per la stella S si circonduca il suo circolo di latitudine DPsB; la longitudine della stella sarà l'arco CFB e la latitudine sB. Si sa che l'aberrazione se è equale a 20",25 moltiplicata per il seno dell'angolo d'incidenza STE sulla direzione TE del moto.

Sia il raggio della sfera celeste = 1 nel triangolo sferico SBE il lato SB è equale alla latitudine nota L della stella; il lato EB = 90° - BF. Essendo BF = BC - Fe cioè è equale alla differenza delle longitudini della stella, e della terra sarà chiamando λ la 1ª, l la 2ª BE = 90° + l - λ Inoltre l'angolo diedro EBs è retto epperò sarà cos Es = cos L cos(90 - λ + l) = cos L sen(λ - l). Dunque sen ES = sen ETs = $\sqrt{1 - \cos^2 L \operatorname{sen}^2(\lambda - l)}$ e di qui si conclude l'archetto d'aberrazione cs = 20",25 $\sqrt{1 - \cos^2 L \operatorname{sen}^2(\lambda - l)}$ Che se si preferisse avere cs in funzione dell'angolo csS che chiameremo φ, prendendo per origine la SS delle ascisse ortogonali, avremo nel triangolo sferico sEB rettangolo in B. tang EsB = tang φ = tang EB $\frac{1}{\operatorname{sen} Bs}$ = $\frac{1}{\operatorname{sen} L \operatorname{tang}(\lambda - L)}$ Facciasi cs = z chiamando l'arco λ - L per questa e quella che di il valore di cs si troverebbe $z = \frac{20'',25 \operatorname{sen} L \operatorname{sen} \varphi}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 L \operatorname{tang}^2 \varphi}}$ per

equazione polare della curva qsrt secondo cui pajono muoversi le stelle, per causa dell'aberrazione: la quale tradotta in coordinate rettangole viene a

$(x^2+y^2)\{x^2+[y^2-(20''25)^2]\operatorname{sen}^2 L\}=0$ o togliendo il divisore comune x^2+y^2 si avrà $x^2+y^2-(20'',25)^2\operatorname{sen}^2 L=0$ ovvero $\frac{x^2}{(20''25)^2\operatorname{sen}^2 L}+\frac{y^2}{(20'',25)^2\operatorname{sen}^2 L}=1$:

il che prova che la curva tqsr esser un ellisse di cui l'asse x o ss è eguale a $20'',25 \times \operatorname{sen} L$, e l'asse y o sq è eguale a $20'',25$ per qualunque stella. L'asse maggiore si conta poi nel circolo massimo GSAK, condotto per s perpendicolarmente al meridiano. Chiamando α l'aberrazione massima $20'',25$, l'eq. della curva riferita agli assi ts, qr in questi limiti considerati come linee rette sarebbe $\frac{x^2}{\alpha^2\operatorname{sen}^2 L}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$ E questa prova, 1° che per una stella la quale si trovi al polo P dell'ecclittica per cui $\operatorname{sen} L=1$, la curva d'aberrazione è un circolo gHP di raggio $=\alpha$: 2° che per una latitudine L il semiasse minore misurato nella direzione del meridiano BPD della stella (meridiano rispetto all'ecclittica) è eguale ad α per il seno della latitudine, e però a questo seno proporzionale. Il semiasse maggiore essendo sempre eguale a $20'',25$ è eguale ad α. 3° che la curva d'aberrazione per una stella B posta nell'ecclittica, è una retta ef lunga $40'',50$. o 2a posta nello stesso circolo e dimi la stella nella vera posizione occupa il mezzo. Queste apparenze sono quelle che si osservano realmente onde questa teoria riceve dall'esperienza il più alto grado di certezza.

Noi abbiamo nel calcolo d'aberrazione trascurato il moto della terra nel raggio; il quale per l'una essendo per la nostra latitudine che circa 328 metri è quasi trascurabile rispetto al moto di traslazione.

LEZIONE VIII.

Forze componenti e forza risultante – Composizione e risoluzione delle forze – Teorema sopra un sistema di forze in equilibrio – Parallelogramma delle forze – Dimostrazione dedotta dal parallelogramma delle velocità – Dimostrazione di Newton. – Composizione di un numero qualunque di forze, sua costruzione grafica per mezzo di un poligono – Quando il poligono è chiuso il sistema è in equilibrio.

QUANDO un punto sia animato da 2 o più forze che lo sollecitano, esso non seguirà precisamente il moto che gli imprimerebbe o l'una o l'altra di quelle forze; ma seguirà pure una certa direzione con quanta velocità, ambi determinati dalla posizione e dal numero e dalla grandezza delle forze sospingenti. Noi possiamo concepire che tolte tutte le forze, si applichi al punto una forza capace di muoverlo colla direzione e colla velocità che aveva nel 1° caso, questa nuova forza produrrebbe da se un azione precisamente eguale a quella di tutte le prime forze riunite insieme dicesi la risultante di tutte le prime forze, perchè l'azione sua è il risultato delle azioni combinate di tutte le altre forze. Queste ultime rispetto alla risultante dicansi componenti. Veniamo ora a trattare della composizione e scomposizione delle medesime. Per comporre un sistema di forze, sostituire ad esso la risultante di quelle e risolvere una forza, trovare 2 o più forze tali che la risultante ne sia la forza proposta.

Il caso più semplice in cui si debbano comporre più forze è quando si hanno più forze applicate ad un punto ed agenti tutte nella stessa direzione. È chiaro che in questo caso se le forze agiscono eziandio per lo stesso verso la risultante R è eguale alla somma di tutte le componenti $P, P', P'', P''' \ldots$

$$R = P + P' + P'' + P''' + P^{IV} + \text{ecc} \quad \ldots (1)$$

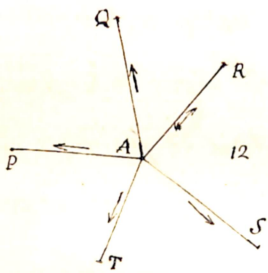
Ma se supponiamo che parte delle forze agiscano in un senso e parte nel senso opposto, benchè le linee di loro azione siem tutte nella stessa direzione, seguirà dalla (1) che tutte le forze agenti nel 1° senso avranno per risultante $R = P + P' + P'' + \text{ecc}$. Le forze $Q, Q', Q'', Q''' \ldots$ agenti nel verso contrario avranno per risultante $R' = Q + Q' + Q'' + Q''' + \ldots$ Ora R agirà nel verso delle sue componenti, e R' nel verso delle sue o in senso contrario ad R. La questione è dunque ridotta a determinare la risultante di R ed R'.

Ora notiamo che nello stesso modo che noi possiamo ridurre due forze componenti cioè agenti nello stesso verso e direzione noi possiamo pure scomporre o risolvere una forza R in 2 forze tali che la loro somma sia eguale ad R e che cospirino. Scomponiamo la forza R in 2 parti (supponga sia $R > R'$) di cui una sia eguale ad R' e l'altra eguale a $R - R'$, cioè poniamo $R = R' + (R - R')$. È chiaro che tutto questo è più fare; laonde se consideriamo ora il punto animato dalle forze R ed R' troveremo che da una parte è tirato dalla forza R', dall'altra dalla forza R' più un altra forza $R - R'$. Le 2 forze R' che sono eguali ed opposte si distruggeranno, e rimarrà solo applicata al punto la forza $R - R'$, che in conseguenza sarà la risultante

delle due. Dunque ne segue che 2 forze agenti in senso contrario hanno per risultante una forza eguale alla loro differenza ed agente nel senso della più grande. Se ora sostituiamo ad R ed R' le loro espressioni in funzione delle componenti, vedremo che la risultante delle forze P, P' P''.... Q Q' Q''.... sarà una forza R'' agente nel senso di P e la cui espressione è

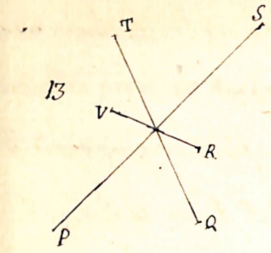
$$R'' = P + P' + P'' + P''' + \ldots\ldots - Q - Q' - Q'' - Q''' - \ldots\ldots \quad (2)$$

Sieno disposte intorno al punto A 5 forze capaci di far ciascuna descrivere al corpo A le rette AP, AQ, AR, AS, AT. Siccome la massa A è eguale per tutte segue che queste forze in intensità saranno proporzionali alle velocità rispettive. Egli è perciò che l'unità di forza potendo scegliersi come si vuole, non possiamo fare che le espressioni delle forze sieno le rette medesime. È in questo modo che si riducono le verità di teoremi sulle forze ad enunciati e dimostrazioni geometriche.

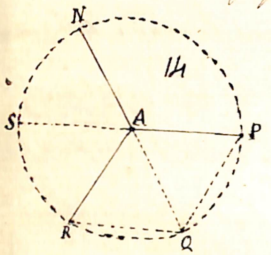


Se le 5 forze AT, AS AR, AQ, AP. fossero tali da farsi scambievolmente equilibrio, necessariamente ciascuna di esse dee essere eguale e contraria alla risultante delle altre 4. E difatto se ciò non fosse componendo quelle altre 4 si avrebbe una forza che non facendo equilibrio alla 5ª, contrariamente a questa produrrebbe un moto e non equilibrio: perchè si sa che 2 forze non possono farsi equilibrio se non sono eguali e contrarie.

Un altro caso in cui si può facilmente prevedere l'equilibrio è quando le forze sono 2 a 2 eguali ed opposte come VA, AR; AS, AP; ecc Fig(13)

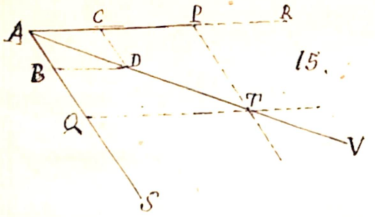


Infatti dividendosi queste l'una colla sua opposta ne risulterà un azione nulla. Queste cose dissi ancora del caso in cui gli estremi P e Q delle forze formano gli angoli di un poligono regolare di un numero qualunque di lati, del quale A sia il centro. Perchè tutto essendo simmetrico intorno ad A le cause di moto non debbono preponderare più da una parte che dall'altra. Così per esempio



3 forze eguali AP, AN, AR diversano eguali e facciano fra loro angoli di 120° gradi; la risultante delle due AP, AR, in questo caso è facile a trovarsi, perchè dovendo esse eguagliare la grandezza ed opposizione (in direzione) la NA non sarà altro che AQ ad NA eguale ed opposta. Se tirasi RP, RQ, facilmente per la ragione degli angoli di triangoli APQ, ARQ si troverà APRQ essere un rombo di cui AQ è la diagonale. E' dunque stabilito che la risultante di 2 forze eguali applicate ad un punto, e facenti fra loro angoli di 120° è una 3ª forza eguale a ciascuna di esse e che divide per metà quest'angolo. Questa forza è evidentemente la diagonale del parallelogramma sulle componenti costrutto.

Generalizziamo ora questo risultato e dimostriamo che se ad un punto A (Fig" 18) sono applicate 2 forze rappresentate da AP ed AQ il punto si muoverà come se fosse sollecitato dalla forza rappresentata in grandezza e direzione dalla diagonale AP del parallelogrammo fatto (sopra) AP AQ.



15.

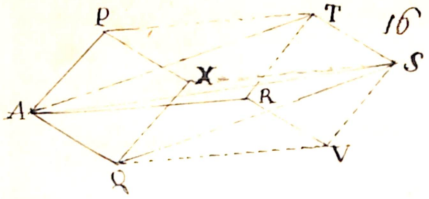
e più brevemente che la risultante di 2 forze rappresentate e tali contigui di un parallelogramma è la diagonale dello stesso parallelogramma che passa pel punto di applicazione delle medesime. Molti autori hanno dato di questo teorema dimostrazioni puramente analitiche (p.e. Poisson) ma qualunque sia il merito di questa si preferisce di dedurla dal teorema del parallelogramma delle velocità (vedi Loz VI) Ripetiamo per il lemma 5° della Loz V, se AB AC sieno le velocità impresse all'unità di tempo dalle forze AB, AQ qualunque sia la massa A dobbiamo avere AC : AP :: AB : AQ. Ripetuto se si compie il parallelogramma ACBD esso sarà simile ad APTQ. Ma pel teorema del parallelogramma delle velocità, la velocità che risulterà realmente dal mobile sarà in grandezza e direzione rappresentata da AD. I triangoli ACD ed APT essendo simili se ne ricava Ang CAD = Ang PAT. Il punto A sarà dunque portato sulla diagonale AT con velocità AD La forza che produce questo moto agisce dunque nel senso della diagonale. È ancor facile dimostrare che la forza capace a produrre la velocità AD, è proprio rappresentata in lunghezza da AT; perchè se la si chiama x avremo pel lemma 5° della Loz V.

vel. AC : vel. AD :: forza AP : x = AT Or la forza che agendo nel senso AT produce la velocità AD è quella che produce l'effetto delle due AP ed AQ riunite, o in breve è la risultante delle due AP ed AQ. E così

resta dimostrato il famoso teorema del parallelogrammo delle forze.

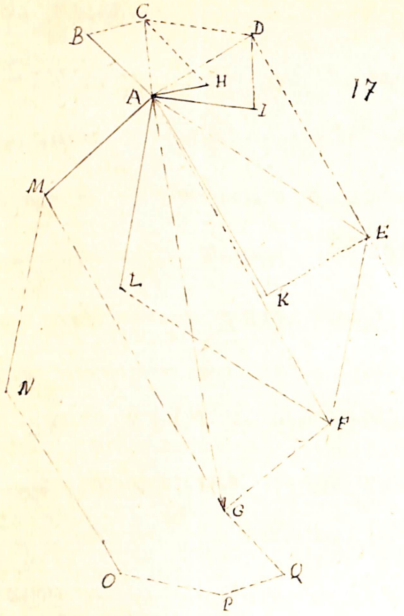
Newton partendo dagli stessi principi da noi, ha dato una dimostrazione di questo teorema, che pare doversi, sebbene la differenza non stia che nella forma - Sia il punto A animato dalle 2 forze AP, AQ; se fosse animato solo dalla forza AQ, questa alla fine del tempo t dovrebbe far giungere il punto A sopra un punto della retta PT condotta per P parallelamente ad AQ. Ora siccome la forza AQ agisce parallelamente alla retta PT così ella non può ne avvicinare ne allontanare A alla PT; dimodochè l'azione della forza PA si conserverà intiera, e alla fine del tempo t, A giungerà in un punto di PT. Per simil guisa si vede che AP agendo parallelamente a QT non influisce nulla sull'azione della forza AQ che tende a far venire dopo il tempo t il punto A sopra un luogo della retta QT. Dovendosi dunque dopo il tempo t il punto A trovarsi simultaneamente sulle 2 rette PT, PQ dopo lo stesso tempo, sarà giunto in T estremo della diagonale del parallelogrammo fatto sulle rette AP AQ (Philos. Nat. Princ. Math.)

Premesso questo principio generale diventa facilissimo il comporre in una una numero qualunque di forze. Supponga due per es si abbiano 3 forze, AP AQ, AR. (Fig 16) che si vogliano comporre in una sola. La risultante delle 2 forze AP AR è dietro ciò che precede la diagonale AT, onde l'azione delle 3 forze data è la stessa che quella delle 2 forze AT, AQ. Ma la diagonale AS delle parallelogrammo ATSQ costrutto su AT AQ sarà di questa due



la risultante, e la risultante eziandio delle 3 forze AP, AQ, AR. Se le 3 forze date non sono nello stesso piano, agevolmente si può dimostrare, la diagonale AS esser diagonale del parallelepipedo costruito sulle 3 forze AP, AQ, AR. Infatti APRT ne sarebbe già una faccia: condotta TS eguale e parallela ad AQ, essa sarà ancora eguale e parallela a PX e compiendo i parallelogrammi PXST, APXQ, S sarà il vertice opposto ad A del parallelepipedo APXQRVST. Viene quindi il teorema che se un punto sia sollecitato da 3 forze che possono sempre rappresentare i 3 lati contigui di un parallelepipedo, la risultante di esse sarà la diagonale di questo parallelepipedo. Questo teorema dicesi parallelepipedo delle forze.

Sia generalmente un N.° qualunque di forze AB AH AI &c. (Fig.ª 17) da comporsi in una. Incomincio a comporre le 2 prime condocendo per B, BC eguale e parallela ad AH, sarà AC la risultante di AB, AH. Compongo la AC con la AI: cioè conduco per C CD eguale e parallela ad AI sarà AD la risultante delle 3 AB AH AI. Ora compongo AD con la 4.ª forza AK, tirando per D DE eguale e parallela alla stessa AK, sarà AE la risultante delle 4 forze AB, AH AI, AK. Componendo nuovamente AB con la 5ª forza AL, cioè tirata per E EF eguale e parallela ad AL avrò in AF la risultante delle 5 prime forze. E così si va componendo successivamente



17

forza con la risultante delle precedenti finchè si congiunge l'ultima AM con la risultante AF di tutte le altre. La diagonale AG sarà la risultante di tutto il sistema

E' facile vedere che in questa costruzione è affatto inutile tirare le successive risultanti CA, DA EA ecc. che sarebbe bastato per B tirare BC eguale e parallela ad AH, per C, CD eguale e parallela ad AI ecc finchè per F si conducesse FG eguale e parallela all'ultima forza AM. tirando poi GA questa sarebbe stata la risultante ~~generale~~ cercata.

Siccome l'ordine delle successive composizioni è indifferente e tanto si può cominciare dalla prima come dall'ultima forza, e quanto da una qualunque di esse e congiunta con una qualunque delle altre (perchè la risultante AG è sempre la medesima) segue che qualunque ordine si segua nel tirare la linea poligonale ABCDEFG, la retta AG sarà sempre quella che la chiude, qualunque sia la disposizione degli altri lati. Viene adunque di ritrovare da più comporre più forze in una basta partendo da A formare una linea poligonale i cui lati siano respettivamente eguali ad una delle forze ed ad esse parallele. Congiungendo l'estremità G di questa linea col punto A la GA sarà la risultante

che si cercava

2. Le forze applicate in A potendo essere e non essere nello stesso piano, la linea poligonale rendetta potrà essere o piana o sghemba. Da ogni modo da questa considerazione risulta la dimostrazione di un teorema di Geometria, ed è: se più linee di lunghezza e direzione determinate concorrono in un punto A, formando a principio da A una linea poligonale di un numero tale ma eguale e parallelo a ciascuna forza, qualunque sia l'ordine di questi lati, la retta AG che li rettende da uno all'altro estremi sarà sempre costante in lunghezza e direzione, così costruendo la curva AMN'OPG in ordine opposto ad ABCDEG si otterrà sempre per rettendente AG, e lo stesso quando si varii l'ordine dei lati della medesima.

3. Se oltre alle forze già applicate in A ve ne fosse stata un altra eguale ed opposta ad AG, tirando per G una retta eguale e parallela a quella, il secondo lunto della linea poligonale sarebbe ancora A onde la risultante nulla, ed il sistema sarebbe in equilibrio. Ecco il motivo onde dal vedere la forza applicata eguale ed opposta a GA risultante di tutte le altre.

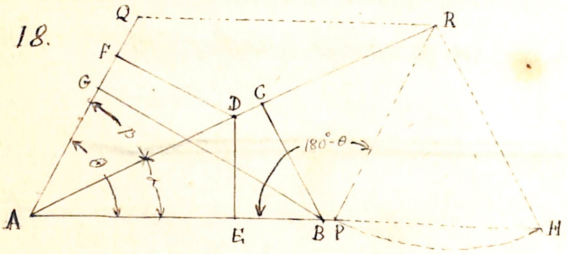
(Venturoli ibid. Poisson ibid.) —

LEZIONE IX

Risoluzione delle forze – Il problema indeterminato – Condizioni che lo determinano. – Formole per la composizione e risoluzione delle forze – Teoremi che danno relazioni fra le componenti e la risultante – Spiegazione dei segni delle forze – Risoluzione di una forza secondo 2 o 3 assi ortogonali – Composizione di un N.° qualunque di forze poste in un piano o nello spazio per mezzo della loro risoluzione secondo 2 o 3 assi –

La composizione di un N.° qualunque di forze è problema determinato, perchè quando un corpo è animato da più forze il moto e la direzione che queste sono cause, Ma lo stesso non è della risoluzione di una forza in più altre. Prendiamo solo per esempio la scomposizione di una forza in 2 componenti.

18.



Sia AR la forza a decomporsi; sopra la retta AR presa come diagonale si conducono per gli estremi del foglio infiniti parallelogrammi di cui i lati corrispondenti ad A rappresentino 2 forze di cui AR è la risultante, segue che infinite sono le soluzioni per il piano del foglio. La stessa cosa potendosi ripetere per tutti i piani che passano per la AR, ne viene che le soluzioni saranno infinite volte infinite.

Per vedere tuttavia quale condizioni potrebbero servire a determinare le 2 componenti esprimiamo le relazioni che esse hanno colla risultante, e cogli angoli che le stesse fanno con quella. Sia α l'angolo della forza $AP = P$ con la risultante, β quello della forza Q, θ l'angolo QAP delle 2 componenti, e designiamo il valore della risultante colla lettera R. Il parallelogrammo $ACRP$ da $PR = Q$, angolo $ARP = \beta$ angolo $APR = 180° - \theta$. Adunque tra gli angoli α e β, $180° - \theta$ e le rette P, Q, R. esisteranno le stesse relazioni che esistono fra i 6 elementi del triangolo ARP; cioè a dire ricordando che $\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ si avrà $P : Q : R :: \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\theta$. (1) Onde le formole che danno le componenti saranno. $P = R\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\theta}$ (2) $Q = R\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta}$ (3)

La formola (1) si enuncia sotto forma di teorema dicendo che le 3 forze P, Q, R. stanno rispettivamente fra loro come i seni degli angoli compresi fra le altre due. Una 3ª relazione fra i 6 elementi è evidentemente.

$\theta = \beta + \alpha$ (4) Finalmente l'ultima è

$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos(180° - \theta)$ ossia $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$ (5)

Con queste 5 relazioni dati 3 dei 6 elementi α, β, θ; P, Q, R. purchè fra essi ci sia una delle 3 forze si possono avere gli altri 3. Queste sono appunto le condizioni che determinano il problema della scomposizione di una forza in 2.

Bisogna dunque due sono dati 1°: i valori delle 2 componenti. È necessario che la loro somma sia maggiore e la loro differenza minore della risultante data (deriva ciò dalla condizione necessaria per poter costruire un triangolo dati i 3 lati) 2° le direzioni delle 2 componenti rispetto alla risultante;

Sul che è da osservare che la somma degli angoli α e β non deve eccedere $180°$ (poichè α e β sono 2 angoli di un triangolo); 2° inoltre la risultante deve cadere fra le 2 componenti, poichè la diagonale di un parallelogrammo deve sempre cadere fra i lati e non fuori; 3° il valore e la direzione di una delle componenti; 4° il valore di una delle componenti e la direzione dell'altra. Nel quest'ultimo caso è da osservare che per costruire le componenti bisogna segnare la direzione data AH della 2ª componente, poi fatto centro in R con raggio AP eguale all'altra componente bisogna AH. Le 2 componenti potrebbero essere AP, RP ovvero ancora AH, RH. Due soluzioni soddisfano dunque al problema, ma quando l'arco PH passa tangente a AH se ha una sola, e il parallelogramma diventa un rettangolo. Non ci ha poi alcuna soluzione reale quando la data RP è minore della perpendicolare abbassata da R sopra AH

Un altro teorema si dimostra intorno alle 3 forze P, Q, R ed è che se da un punto D di una delle 3 si abbassa sulle altre le perpendicolari DF DE, queste altre 2 staranno fra di loro in ragion inversa delle medesime cosicchè sarà AP : AQ :: DF : DE. Difatti si ha FD = AD sen β e DE = AD sen α ovvero DF : DE :: sen β : sen α. Ma la (1) dà sen β : sen α :: P : Q ovvero P : Q :: DF : DE e AP × DE = AQ × DF

Similmente si proverebbe che AQ × BG = AR × BC

Nel caso in cui si volesse che le 2 componenti fossero ad angolo retto basterebbe fare sen θ = 1 cos θ = 0 nelle formole (1) (2) (3) e si avrebbe

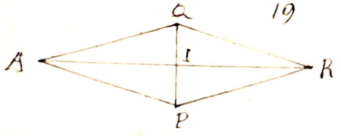
(6) $P = R\operatorname{sen}\beta = R\cos\alpha$ (7) $Q = R\operatorname{sen}\alpha = R\cos\beta$ (8) $R' = P^2 + Q^2$.

Le quali cose sono egiandio manifeste considerando le relazioni che hanno fra loro i 6 elementi di un triangolo rettangolo.

Nel caso in cui fosse $P = Q$ si ricaverebbe dalla (1) $\alpha = \beta$ ovvero $\theta = 2\alpha$ e le (2) e (3) diverrebbero

$$(9)\quad P = R.\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha} = R\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{R}{2\cos\alpha}$$

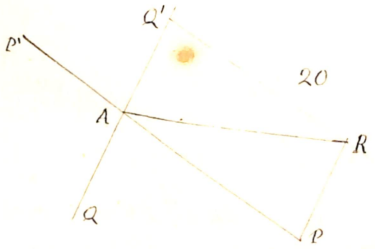
ossia $R = 2P\cos\alpha$. Ciò è manifesto egiandio dalla figura del rombo.



19

Poichè $\sphericalangle QAR = \alpha$ avendosi $QI = PI$ $AI = IR$ e AR ortogonale a QP sarà $AR = 2AI = 2AQ\cos\alpha = 2P\cos\alpha$. — E AR è la risultante delle AP AQ -

Nell'enumerare i casi della risoluzione di una forza in 2 abbiam posto nel 2° per condizione, che gli angoli α e β fossero tali che la risultante fosse in mezzo alle 2 componenti. Vediamo che cosa avverrebbe se tal condizione non si avverasse, e per fare il caso più semplice supponiamo si voglia scomporre la forza AR secondo le direzioni AP AQ per cui si ha $RAP = \alpha$ $RAQ = 90° + \alpha$, sarà la forza nella direzione AP eguale a $R\cos\alpha$ e nella direzione AQ seguendo le formole la componente sarà $R\cos(90° + \alpha) = \mp R\operatorname{sen}\alpha$ L'impossibilità della risoluzione vien dunque mostrata dall'analisi in questa soluzione negativa. Ma nello stesso tempo ci

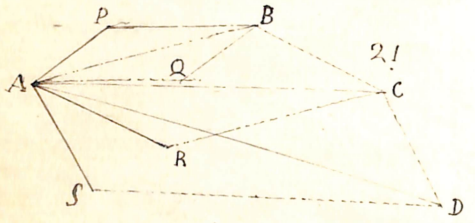


20

mostra i termini in cui doveasi proporre il problema. Difatti se noi prendiamo per positiva la forza contata da A verso Q la forza $-R\operatorname{sen}\alpha$ non sarà altro che la lunghezza $R\operatorname{sen}\alpha$ ossia AQ' contata da A verso Q'. Coricchè allora le componenti saranno AQ' AP.

Se si domandasse la scomposizione della forza AR nelle direzioni AQ, AP' essendo ottusi ambi gli angoli P'AR, QAR. (supponiamo per semplicità PAQ retto); si avrebbero $P' = R\cos(180° - RAP) = -R\cos RAP$; $Q = -R\operatorname{sen} RAP$ Le 2 componenti sono ambe negative, le loro vere direzioni saranno in conseguenza AP, AQ'. Prendendo $AP = R\cos RAP$ ed $AQ' = R\operatorname{sen} RAP$ si avrà la scomposizione cercata secondo l'retto AP' AQ ma in senso contrario a quello dell'enunciato. Notiamo adunque che quando si incontra una forza col segno negativo si deve contare nel senso contrario a quello a cui secondo l'enunciato della questione sarebbe dovuto numerarsi.

Formole analitiche per la composizione di più forze. Siano date le forze AP = P, AQ = Q, AR = R, AS = S, e gli angoli PAQ = α, QAR = β RAS = γ; si dimanda la lunghezza AD della risultante e l'angolo PAD, che fa la risultante con la direzione d'una delle forze p.e. PA



Componendo le 2 AP, AQ si ha.

$$AB = R' = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

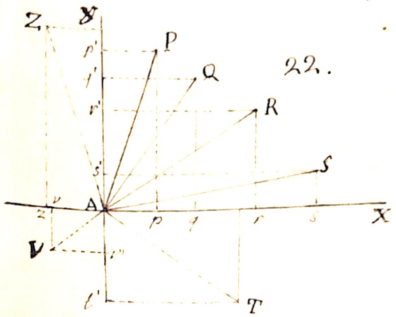
e l'angolo PAB, da cui si deduce QAB. Ma BAR = QAB + β; e conoscendo BA ed AR si ne conclude

CAR e CA. Similmente l'angolo CAS può ottenersi sommando CAR con γ. Conoscendo CA, AS se ne conclude AD, ed allora se ne può concludere DAC che sommato con CAB + BAD angoli che si possono tutti conoscere calcolare dà l'angolo cercato PAD. E così si potrebbe se ci fossero altre forze procedere avanti finchè tutte si fossero trovate composte. Questo metodo però è lungo e soggetto ad errori, come ce ne ha molti più breve ed è il seguente.

Supponiamo dapprima che le forze P, Q, R, S... siano tutte in un piano. Col punto comune A d'applicazione condurre nel piano 2 assi AX, AY, che meglio ci piace. Scomponiamo quindi ciascuna delle forze date secondo le direzioni dei 2 assi. Così abbassando da P le perpendicolari Pp, Pp' saranno Ap, Ap' le 2 componenti di AP. E similmente Aq, Aq'; Ar, Ar' ci saranno le componenti delle forze Q, R, ecc. Quindi le azioni delle forze Ap, Aq, Ar, As, — Ap' Aq' Ar' As' — e la loro risultante quadrerà di grandezza e direzione la risultante di queste. Ora la risultante di tutte le componenti prese secondo l'asse delle x è la somma delle medesime; e così pure la somma delle componenti nel senso dell'asse delle y è la risultante di queste. La risultante adunque delle forze agenti nel senso della AX sarà chiamandola X

$$X = Ap + Aq + Ar + \ldots = P\cos\alpha + Q\cos\alpha' + R\cos\alpha'' + \ldots$$

designando con $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$... gli angoli che P, Q, R, ... fanno coll'asse delle X.



22.

Similmente la risultante delle forze agenti nel verso dell'asse y sarà chiamandola Y e chiamando β, β', β'' —— gli angoli che fanno con l'asse AY le forze P, Q, R ... sarà

$$Y = P\cos\beta + Q\cos\beta' + R\cos\beta'' + S\cos\beta''' + \ldots\ldots$$

La risultante delle forze P, Q, R, S ... equivalerà la risultante delli 2 X ed Y e sarà $R = \sqrt{X^2+Y^2}$ e se siano λ, μ, gli angoli che ella fa cogli assi x ed y sarà $\cos\lambda = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}$ $\cos\mu = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}$

Vedrassi così determinata la grandezza e la direzione della risultante.

In questa composizione è da osservarsi che gli angoli che fanno le direzioni delle forze cogli x positivi potendo essere ottusi, come difatto avviene per la AZ, la componente nel verso degli x diventa negativa come Az. Ecco che nella somma delle componenti nel verso delle x, queste dee valere il segno negativo, cosicchè la somma delle componenti sarà una somma algebrica. E difatti se l'angolo XAZ è ottuso la componente Az sarà diretta in senso contrario alle componenti positive, e per trovare la risultante Az si dovrà sottrarre. Il che equivale a dire che Az conserverà il segno datole dal coseno che ivi entra come fattore, e che la somma delle componenti nell'asse delle x deve esser fatta come una somma algebrica. Lo stesso dicasi rispetto per quelle ~~componenti~~ forze che hanno le componenti negative nel verso delle y come AV, e per quelle che le hanno negative nel verso delle x e delle y come AV.

È da notarsi che per abbreviazione di scrittura si usa pure.

$P\cos\alpha + Q\cos\alpha' + R\cos\alpha'' + \dots = \Sigma P\cos\alpha$ e $P\cos\beta + Q\cos\beta' + \dots = \Sigma P\cos\beta$

Designando col segno Σ la somma di tutti i termini analoghi a $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$.

Supponiamo ora che vi sieno date più forze $S, S', S'' \dots$ nello spazio e che si vogliano fra loro comporre. Invece di 2 assi ortogonali fra loro x, y, z e si decomponga ciascuna forza secondo le direzioni dei 3 assi in 3 componenti. Ciascuna forza sarà la diagonale di un parallelepipedo rettangolo i cui 3 lati saranno le 3 componenti secondo gli assi. Designando con $\alpha\ \alpha'\ \alpha'' \dots$ ecc gli angoli che le forze $S, S', S'' \dots$ fanno con l'asse delle x, e con $\beta\ \beta'\ \beta'' \dots$ — $\gamma\ \gamma'\ \gamma'' \dots$ gli angoli dalle stesse fatti rispettivamente cogli assi y e z, avranno composte le forze in 3 altre agenti secondo gli assi ed eguali a

$$X = \Sigma S\cos\alpha \qquad Y = \Sigma S\cos\beta \qquad Z = \Sigma S\cos\gamma$$

Componendo queste 3 in una avremo per risultante finale la diagonale del parallelepipedo rettangolo fra esse compreso cioè:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

e chiamando $\alpha_n\ \beta_n\ \gamma_n$ gli angoli che essa fa cogli assi x, y, z avremo

$$\cos\alpha_n = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\ ;\ \cos\beta_n = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\ ;\ \cos\gamma_n = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

Rispetto ai segni delle componenti si possono fare le stesse osservazioni che furono fatte pel caso di 2 assi; aggiungeremo che la risultante si considera sempre come di segno positivo.

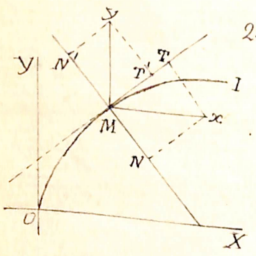
(Venturoli §§ 16, 18, 21, 23, 24 — Sm. Obijon 29-32)

LEZIONE X

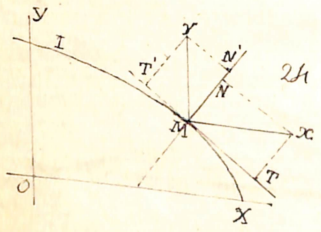
Composizione delle direzioni di più forze – Date 2 forze aventi un punto comune poste su di una curva nelle direzioni delle ascisse e delle ordinate della medesima, risultante in 2 forze eguali secondo la Tangente e la Normale alla curva in quel punto – Problema inverso – Applicazioni a casi particolari.

II. Metodo di composizione precedentemente esposto non è che un caso particolare dell'applicazione che si può fare della scomposizione delle forze per componente e cangiante di direzione. Un'altro caso si ha nella seguente questione.

Ad un punto M posto sopra la curva MM' sono applicate le forze Mx, My, eguali nelle direzioni delle coordinate alla curva riferita agli assi OX, OY. Si vogliono surrogare a dette eguali una nuova delle Tangente e della Normale nel punto M alla curva; cosicchè il loro effetto sia eguale a quello delle 2 prime. Si dimanda come questa sostituzione della forza.



23.



24

Per eseguire ogni composizione avvertiamo che si prenderanno le forze Mx, My positive quando agiscono nel senso delle ascisse e delle ordinate positive, come è caso delle nostre figure e negative nel caso contrario – Similmente le forze tangenziali

e normali saranno positive quando formano coll' ~~asse della~~ forze Mx positive angoli acuti; quel è il caso delle MT; MN: nel caso contrario negative come la MN' nel Fig 23, e MT' nella fig.ª 24.

Ciò premesso, le 2 forze Mx, My, nella direzione della Tangente e della Normale si avranno per la 1ª figura.

Componenti nel senso della tangente $\begin{cases} X \cos TMx \\ Y \cos T'My \end{cases}$ Componenti nel senso della Normale $\begin{cases} X \cos NMx \\ -Y \cos N'My \end{cases}$

Ora è chiaro che $\cos TMx = \frac{dx}{ds}$ $\cos NMx = \frac{dy}{ds}$; e che $TMy = NMx$ ed $N'My = TMx$; chiamando dunque T la componente totale tangenziale, N la forza totale normale sarà

$$T = \frac{Xdx + Ydy}{ds}, \qquad N = \frac{Xdy + Ydx}{ds} \qquad (1)$$

Queste formole servono pel caso in cui $\frac{dy}{dx}$ sia positivo, Quando il $\frac{dy}{dx}$ sia negativo come è nel caso della Fig 24 avremo.

Componenti nel senso della tangente $\begin{cases} X \cos TMx \\ -Y \cos T'My \end{cases}$ Componenti nel senso della normale $\begin{cases} X \cos NMx \\ Y \cos N'My \end{cases}$

Ora $\cos TMx = \frac{dx}{ds} = \cos N'My$; $\cos NMx = -\frac{dy}{ds}$; perchè dy è negativo in questo caso, sarà dunque.

$$T = \frac{Xdx + Ydy}{ds}; \qquad N = \frac{-Xdy + Ydx}{ds} \qquad (2)$$

Le quali formole non differiscono dalle (1) che pel segno di N ed anche si compendiano in quelle $T = \frac{Xdx + Ydy}{ds}$; $N = \pm \frac{Xdy - Ydx}{ds}$ (3)

dovendo di prendere il segno superiore o inferiore secondochè dy è positivo o negativo.

Per risolvere il problema inverso cioè ridurre 2 forze agenti nel senso della

tangente e della normale a 2 altre eguali secondo le ascisse e le ordinate, basta ricavare dalle δ, X ed Y in funzione di T ed N e si ottiene

$$X = \frac{T dx \pm N dy}{ds} \; ; \quad Y = \frac{T dy \mp N dx}{ds} \quad (1)$$

In ogni caso particolare si potrà formare il $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$

Sia per es la curva $OM1$ una parabola che abbia per equazione $y^2 = 2px$. Differenziando troviamo $2y dy = 2p dx$ onde risulta $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$. Or $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ epperò $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}}$

In conseguenza $\frac{dx}{ds} = \frac{y}{\sqrt{p^2 + y^2}}$. Similmente $\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}}$;

e $\frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + y^2}}$. In tal caso si avrebbe

$$T = \frac{Xy + Yp}{\sqrt{p^2 + y^2}} \; ; \quad N = \frac{Xp - Yy}{\sqrt{p^2 + y^2}} \; ;$$

Sia per esempio $X = 10^{kg}$, $Y = 20^{kg}$; e il punto abbia per ascissa 2 La sua ordinata sarà $\sqrt{4p}$, e facendo $p = 1$ sarà 1 e si avrà.

$$T = \frac{10^{kg} \cdot 1 + 20^{kg} \cdot 1}{1\sqrt{2}} = \frac{120^{kg}}{1\sqrt{2}} = 15^{kg}\sqrt{2}.$$

ed

$$N = \frac{10^{kg} \cdot 1 - 20^{kg} \cdot 1}{1\sqrt{2}} = -\frac{10^{kg}}{1\sqrt{2}} = -5^{kg}\sqrt{2}.$$

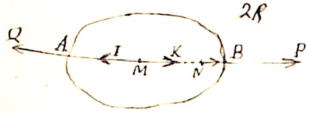
Cioè in tal caso la normale è diretta nel senso $N'M'$ (Fig 23)

(Venturoli 58, 36.–)

LEZIONE XI

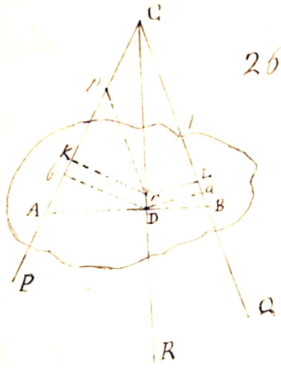
Delle forze applicate a diversi punti di uno stesso corpo — Teorema che le riguardano e modo di comporle quando le 2 forze agiscono nel medesimo piano — Caso particolare in cui le 2 forze sono parallele; dedurremo di alcuni teoremi intorno alle forze parallele ed al modo di comporle.

NOI abbiamo finora fatta la supposizione che tutte le forze di cui dovevamo calcolare l'effetto fossero applicate ad un punto solo. Siccome ciò non è sempre vero e spesso dannosi casi di forze applicate a più punti, così dovremo ancora occuparci di questo caso. Siano 2 forze P e Q applicate a 2 punti M ed N di un corpo. Il caso più semplice sarebbe quello in cui le 2 forze P e Q agissero nella direzione MN e fossero eguali e direttamente opposte. Egli è manifesto che in tal caso il corpo si conserverà in equilibrio, e le sue parti comprese fra M ed N soffriranno una tensione eguale alla somma delle 2 forze P e Q. Supponiamo ora P, Q direttamente contrarie ma ineguali, e sia per es. la forza P più grande di Q. Noi potremo scomporre P nella somma di 2 forze, una eguale a Q, l'altra eguale a P − Q. Egli è chiaro che le 2 forze Q, Q poste l'una da una parte, l'altra dall'altra, si faranno equilibrio, ed il loro effetto sarà nullo. Il corpo dunque si adopererà come se fosse spinto da una forza P − Q applicata in N.



Prima di passare ad un caso più complicato dimostreremo il seguente principio; Una forza NR agente nella direzione AB produce sempre sul corpo lo stesso effetto sia pure essa col suo punto d'applicazione trasportata dove si vuole sulla retta AB. Sia per es. M un punto della retta AB cui si applichi MK eguale in grandezza e direzione ad NR. Poichè l'effetto della forza NR è lo stesso che quello della forza MK. Supponiamo che la sola forza NR agisca; nel punto M io applico secondo la direzione della NR le 2 forze MK, MI, ciascuna eguale ad NR e fra loro opposte. Non si turberà per nulla lo stato dinamico del corpo perchè MK, MI si fanno equilibrio. L'azione dunque delle 3 forze MK, MI, NR eguaglierà l'azione della forza NR. Ora le forze MI NR essendo eguali e direttamente contrarie si faranno ancora equilibrio, ne viene dunque che l'azione delle 3 forze si riduce a quella della forza MK. Così è provato che l'azione sul corpo della forza NR eguaglia quella della forza MK; e che è lecito trasportare una forza in qualunque punto della sua direzione; poichè il punto cui si applica la forza sia col corpo, o almeno col corpo stabilmente unito, e che il corpo formi un sistema rigido.

Siano ora ai 2 punti A e B (Fig. 26) di un corpo applicate le 2 forze AP, PQ giacenti in uno stesso piano. Prolungando le loro direzioni, esse si incontreranno in un punto C che posso sempre supporre invariabilmente al corpo connesso. Pel teorema poc'anzi dimostrato l'effetto delle forze P, Q sarà lo stesso anche quando si trasporti la forza AP in Cp e la forza BQ in Cq. La risultante Cr delle 2 forze Cp, Cq, sarà ancora la risultante di AP, BQ. Lo stesso



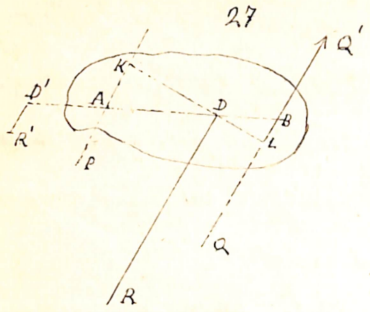
26

Teorema poi' sopra citato si mostra che posto applicare la risultante Cr in un punto qualunque della sua direzione per es D; basta che il punto D giaccia sul corpo e vi sia invariabilmente connesso

Fra le 3 rette AB, DR, BQ. esistono le relazioni che sono fra le loro eguali Cp, Cq, Cr. e che abbiamo scritto in una delle Leg antecedenti. Verrà ancora luogo il teorema che se ad un punto qualunque di una delle 3 forze P, Q, R. prolungata se si vuole, si abbiano nelle 2 altre 2 perpendicolari le 2 altre forze stanno fra loro in ragione inversa delle respettive perpendicolari. - Così AP : PQ :: Da : Db. Ciò può provarsi agevolmente osservando che $\frac{Da}{Db} = \frac{rL}{rK}$. Ora l'angolo Cpr è eguale all'angolo Cqr : saranno pure eguali Kpr, Lqr, e i 2 triangoli Krp, Lrq saranno simili : saranno $\frac{rL}{rK} = \frac{rq}{rp} = \frac{AP}{BQ}$: Sarà dunque

$$\frac{Da}{Db} = \frac{AP}{AQ} \quad \text{ossia} \quad BQ \times Da = AP \times Db.$$

Tutto ciò è indipendente dalla maniera inclinazione delle forze AP BQ; potremo dunque supporre che BQ giraudo divenuti parallela ad AP Allora l'angolo delle 2 forze divenuta zero! la lunghezza della risultante sarà allora (Leg IX) $\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\theta} = P+Q$ ed $\frac{P}{R} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{0}$ onde $\operatorname{sen}\beta = 0$ $\beta = 0$, e così pure $\alpha = 0$. Dunque la risultante DR sarà una retta parallela alle 2 componenti ed eguale alla loro somma. Per trovare poi a che distanza da A e B deve collocarsi, riflettiamo che deve avere, (Fig 27)



abbassando da D, DK DL. P:Q :: DL:DK.

Ora la somiglianza dei triangoli DKA. DBL

da. DL:DK :: DB:DA. ossia DB:DA :: P:Q

Il punto d'applicazione della retta DR divide dunque AB in 2 parti inversamente proporzionale alle 2 componenti. Componendo l'ultima proporzione si ha DB+DA : DB : DA :: P+Q : P : Q. Potendo in luogo di DB+DA, AB; in luogo di P+Q, R si avrà DB : DA : AB :: P : Q : R. Cioè ciascuna delle 3 forze è proporzionale alla distanza delle altre due.

Si hanno dunque per la composizione di 2 forze qualunque parallele i seguenti teoremi

1°. La risultante di 2 forze parallele è parallela alle componenti.

2°. La risultante è eguale in lunghezza alla somma algebrica delle componenti.

3°. Ciascuna delle 3 forze, P, Q, R è proporzionale alla distanza delle altre 2.

Nel caso in cui una delle forze per es Q sia negativa come BQ' la risultante sarà P-Q', perchè l'angolo delle forze AP, BQ' essendo allora di 180° si avrà $R = \sqrt{P^2+Q^2-2PQ'} = P-Q'$. È pur questo che nel 2° teorema invece di dire semplicemente che la risultante è eguale alla somma delle componenti, abbiamo a somma aggiunto l'epiteto algebrica.

Più più se nella proporzione AD : AB :: Q : R si fa Q' negativo, e a R si sostituisca P-Q' avremo AD : AB :: -Q' : P-Q' onde ricavasi $AD = -AB \cdot \frac{Q'}{P-Q'}$. Ora quando P > Q' si avrà AD negativo, cioè dire il punto di applicazione della risultante non sarà più compreso fra quelli

delle componenti, ma posti dalla parte della forza maggiore P; con la condizione però che il D' sia tal punto allora avrà D'A : D'B :: Q : P

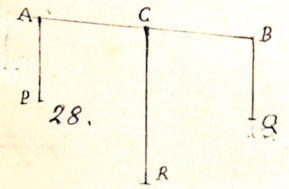
Si è così avuta la teoria della composizione delle forze parallele da quella delle forze aventi ad angolo. Siccome però nel passare da queste a quelle un elemento è entrato implicito e questo compensando combinato colle permanenze di altri elementi, può dar luogo a qualche nuova conferente geometrica, perciò avremo dei principii non esposti una dimostrazione diretta e fornita di tutto il rigore da si può desiderare.

(Vedi fig. 41 - 44)

LEZIONE XII.

Dimostrazione diretta dei teoremi sulle forze parallele – Principio della bilancia e dimostrazione datane da FOURIER – Teorema d'ARCHIMEDE – Caso delle forze parallele in cui non si ha risultante – Coppia – Composizione di un numero qualunque di forze parallele – Resultante relativa –

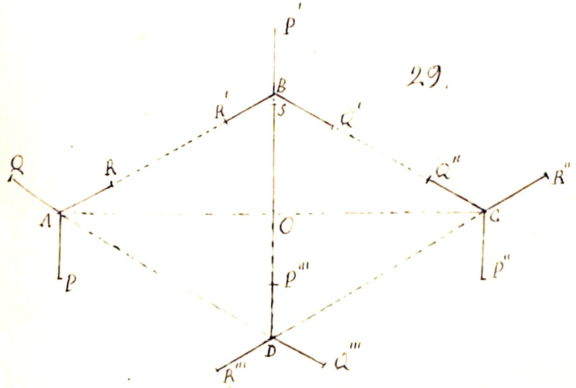
LA dimostrazione che andiamo a dare dei principii sulle forze parallele si fonda sul principio seguente, chiamato col nome di principio della bilancia. Se alle 2 estremità di una retta AB sono applicate 2 forze AP BQ ad essa perpendicolari la risultante sarà una forza CR eguale al doppio di ciascuna, loro parallela ed applicata al punto C che divide per mezzo AB.



28.

Siccome la teoria delle forze parallele è stata trovata molto prima di quella delle forze concorrenti, poichè della 1ª si trovano tracce in Aristotele, e ebbe ben sviluppata e teoria già formata in Archimede (dei quali il 1° fiorì 330 anni A.C. ed il 2° nacque a Siracusa l'anno A.C. 287 e fu ucciso nella presa fatta dai Romani della stessa città l'anno A.C. 212), mentre per trovare la cognizione del parallelogrammo delle forze dobbiamo discendere sino a Simone Stevin (Geometra fiammingo morto nel 1635); così le dimostrazioni dei teoremi sulle forze parallele non poté ogli autichi meccanici

presentarsi eguali l'abbiamo data; onde fondavano la teoria di queste forze sul principio della Statica che però non pare sia stato rigorosamente dimostrato prima di Fourier, (nato ad Auxerre il 21 marzo 1768, morto a Parigi il 26 marzo 1830) Queste Geometra lo prova in questo modo.



29.

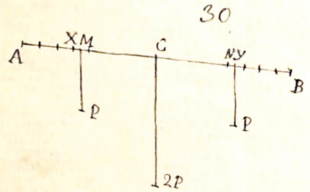
Sopra la AC alle cui estremità sono applicate le forze eguali e parallele AP CP'' si costruisca un rombo ABCD tale che i suoi angoli in B e in D essendo di 120°, quelli in A e in C siano di 60°

Nel punto A si applichi la forza AR nella direzione AB e AQ nella direzione AD ma in senso opposto; e facciasi AR = AQ = AP. L'angolo RAQ essendo di 30°, RAP sarà di 120°: l'angolo RAQ sarà eguale a ADC, epperò le 3 forze P, Q, R formano fra loro angoli eguali e si fanno equilibrio. In simil modo adattando a C le forze CQ'', CR'', nella direzione CD e CB, il punto C sarà equilibrato fra le 3 forze eguali R'' P'' Q''. Similmente al punto B si applichino le forze R', Q' secondo BA e BC e BP' facenti con R' Q' angoli eguali; ~~e P~~ P''. facciasi le forze P', Q', R' tra loro eguali ed eguali a P, P'. Finalmente a D si applichino come a B le 3 forze R''', Q''', P''' come P, P'. Ciò fatto come sono descritte nella figura e prolungansi tutte queste forze eguali a P'', P. Essendo i punti A, B, C, D equilibrio, le 12 forze P, P', P'', P'''; Q, Q', Q'', Q'''; i punti A, B, C, D

R, R', R'', R'''; si faranno equilibrio

Ma noi osserviamo che le forze AQ, DQ''; CR'', DR'''; Q', Q'', R, R'; essendo eguali e direttamente opposte si faranno equilibrio; noi pertanto le toglieremo tutte 8 e l'equilibrio sussisterà fra le 8 forze P, P', P'', P'''. Tirisi la retta DB, e la rimanente perpendicolare da AC. Supponiamo i punti B, D ai quali sono applicate le forze P' P''' in O centro del rombo e metà della retta AC; in luogo delle forze P' P'' noi avremo la forza OS doppia di ciascuna di esse, applicata in O: e l'equilibrio ha ancora fra le 5 OS, P, P''. Se la forza OS equilibra le 2 forze P'' P sarà eguale e direttamente opposta alla loro risultante; onde segue che (OS essendo doppia di P''' e di P e di P'') la risultante di P e P'' è parallela a questa, eguale alla loro doppia applicata nel punto O metà della retta AC come si cerca di mostrare. Si giustificherà dicendo le 2 seguenti proposizioni.

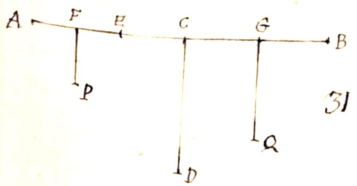
I Sia la retta AB uniformemente gravata di pesi in tutta la sua lunghezza: dico che la risultante degli sforzi di tutti questi pesi sarà un peso eguale alla somma di tutti i pesi distribuiti lungo la retta, applicata al punto C che divide per mezzo la retta AB.



Dividiamo infatti la retta AC in un numero grandissimo di parti eguali e minori di qualunque quantità data; lo stesso facciamo della retta CB. Siccome la retta AB è gravata uniformemente i piccoli pesi di cui saranno gravate le porzioncelle in cui si è divisa la retta,

saranno tutti fra loro eguali, e vadano ad egual distanza da C. Dico di questo
proposizione M. N. Con la stessa ripetuta, piccolezza potremo considerarli come punti
e però diremo che i pesi P, P di cui essi sono gravati equivalgano da C: quindi
la risultante di questi 2 pesi sarà il peso 2P applicato in C. Similmente
per gli elementi successivi X Y. la risultante dei pesi sarà un altro peso
2P applicato in C. Siano M le proporzionali si è divisa la retta CB, avre-
mo 2M pesi eguali a P applicati in G, eseguendo le stesse operazioni per tutte
le successive divisioni. Ora i pesi P di cui era gravata la AE erano appunto
2m, perchè si è divisa la AE in m parti; risulta dunque che lo sforzo di tutti
i pesi onde è gravata uniformemente la retta AB si equivalgano nello sforzo
di un peso eguale alla loro somma applicata in C.

II Sia ancora la retta AB gravata uniformemente di pesi e sia il peso
D la risultante di tutti. Il peso D sarà applicato lungo la retta AB, applicato in
C sulla metà di AB. Invece che di considera-
re tutta la retta AB consideriamola di-
visa in 2 parti eguali e gravate AE EB.



31

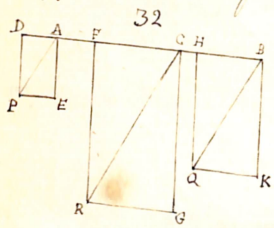
Siccome la distribuzione del peso è uniforme
si avrà: il peso di cui è gravata AE : al peso di cui è gravata EB :: AE : EB. Ora per
la proposizione antecedente noi potremo considerare i pesi su 2 punti, uno
F posto sul mezzo di AE, G posto sul mezzo di EB; ed essi siano applicati
i pesi P Q eguali ai pesi onde sono gravati rispettivamente AE EB.
E la risultante dei pesi P Q sarà il peso D

Ora $P:Q :: AE:EB :: \frac{AE}{2} : \frac{EB}{2} :: FE : EG$. Ora noi abbiamo $FE = AC - AF = \frac{1}{2}(AB - AE) = \frac{1}{2}BE = EG$, e similmente $EF = CF - EC = EG - EC = CG$. Dunque $P:Q :: GC : FC$. Di più $D = P+Q$. Risulta dunque evidentemente che la risultante delle due forze parallele, P e Q è D eguale alla loro somma; che il punto di applicazione C della risultante divide la GF in parti inversamente proporzionali alle componenti P e Q.

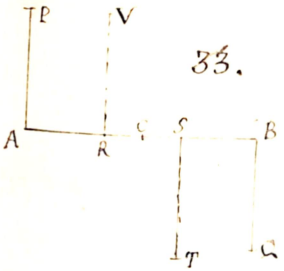
Finora si è supposto che le forze agiscano perpendicolarmente alla retta cui sono applicate, ma è facile far vedere al caso in cui le siano oblique. Sia a trovarsi la risultante delle 2 forze AP. BQ. Scompongo la forza AP in 2 una perpendicolare ad AB l'altra secondo la direzione di AB. Lo stesso farò per la forza BQ. La risultante R che si cerca sarà la risultante delle 4 forze AE BK; AD BH. Delle 2 forze AE BK è risultante $CG = AE + BK$ e tale che $CB : AC :: AE : BK :: P : Q$; la risultante delle AD, BH sarà $CF = AD + BH$ che applicheremo nel punto C. Onde R sarà la risultante delle CG CF, cioè CR diagonale del rettangolo $CFRG$. È giacchè che $CB : CA :: P : Q$, bisogna dimostrare che R è parallela a P, Q ed eguale a $P+Q$. Si ha $\frac{BK}{QK} = \frac{AE}{PE} = \frac{BK+AE}{QK+PE} = \frac{CG}{RG}$. I triangoli CRG, APE, BQK essendo simili sarà l'angolo $KBQ = RCG = EAP$, BK è dunque parallela a $P.Q$. Di più la somiglianza dei triangoli RCG BQK da $R:Q :: RK+AE : BK$; onde $R = Q\left(1 + \frac{AE}{BK}\right) = Q\left(1 + \frac{P}{Q}\right) = Q + P$.

Dimostrano così a tutto rigore i teoremi relativi alle forze parallele.

Nella teoria delle forze parallele v'ha un caso particolare in cui non



non si può trovare risultante. Supponiamo che alla distanza AB = 1 siano applicate le 2 forze P = 10, Q = −9 la distanza della risultante dal punto A verso sinistra sarà (Lez XI) 9! e la risultante stessa sarà = 1. Sia P = 10, Q = −9,9; troveremo la distanza della risultante al punto A eper 99 verso sinistra, e la risultante eguale = 0,1. Diminuendo sempre più la differenza P−Q, la risultante diverrà sempre minore, e la distanza del suo punto d'applicazione da A sempre maggiore; finchè facendo P = Q la risultante sarà zero ed applicata ad una distanza infinita. Non è già che esista tal risultante, ma questo è il limite verso cui tende la risultante facendo la differenza P−Q tende verso zero. Questo caso adunque di 2 forze parallele, eguali, contrarie ma non opposte è un caso tutto speciale, nè può dar luogo a risultante perchè se tale fosse per es ST, siccome tutto è simmetrico rispetto a C, mezzo di AB, dovrebbe pure esser risultante dello stesso sistema la forza AV = ST, e tale che CS = CR. Fra le forze ST, AV vi sarebbe dunque equilibrio ciò che è impossibile.



Del resto se volessi che ST fosse la risultante delle 2 forze P, Q, applicando in S una forza eguale e direttamente contraria a ST, come S' fra le 3 forze S', P, Q vi sarebbe equilibrio. Di più è possibile che Q sarebbe eguale a P + una altra forza S'; ciò che è contro l'ipotesi, ove non si distrugga la forza S' eguagliandola a zero. Le 2 forze P e Q così disposte non potranno stare in equilibrio. ma imprimeremo alla AB un moto rotatorio intorno al suo mezzo C. Se una forza qualsiasi equilibrasse le 2, P Q dovrebbe potere produrre di per se quel moto rotatorio; ma ciò non potendosi fare da una sol forza, segue che una sol forza non può produrre equilibrio, e che più risultante unica in tal caso non si dà.

Un tal sistema di forze dicesi Coppia, e la teoria di essa sarà opportunamente separatamente dimostrata a parte.

Composizione di un N.° qualunque di forze parallele. Dalla composizione di 2 forze parallele è facile passare alla composizione di un N.° qualunque. Sia il sistema da considerarsi di punti A_1 A_2 A_3 ..... animati ciascuno dalle forze parallele P_1 P_2 P_3... agenti secondo la direzione XY e componiamo prima 2 qualunque come P_1 P_2; supponiamo che la risultante P_1+P_2 venga ad applicarsi nel punto C_1 della A_1 A_2. Componga la P_1+P_2 applicata in C_1 colla P_3 applicata in A_3; la risultante applicata per es.° in C_2 sarà $P_1+P_2+P_3$. E così di seguito.

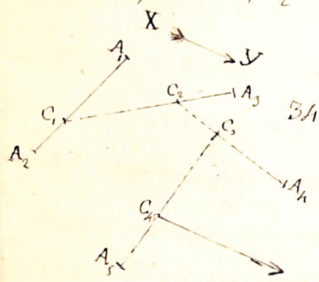


Fig.

In generale per evitar confusione è meglio comporre fra loro tutte le forze positive indi le negative, e finalmente comporre le 2 risultanti così ottenute. Se queste sono disuguali si avrà una risultante unica, se sono eguali e direttamente contrarie vi sarà equilibrio ma se sono applicate a punti diversi vi sarà una coppia. In tal caso le forze date non possono avere risultante unica. E' facile di qui concludere il modo di riconoscere se più forze ammettono risultante unica oppur danno luogo a equilibrio o a coppia.

(Venturoli 37-39; Poisson 44, 80-82)

LEZIONE XIII.

Scomposizione delle forze parallele - È problema indeterminato - Condizioni che determinano il caso della risoluzione in 2 altre - Risoluzione di una forza in 3 parallele e teorema di EULERO. - Discussione dei varii suoi casi - Risoluzione di una forza in 4 parallele applicate a 4 punti dati - È problema indeterminato - Osservazioni che si addicono per provare che era determinato e loro inutilità - Risoluzione di una forza in un N.° qualunque di forze parallele.

È manifesto da quel che si è detto nelle 2 precedenti lezioni che il problema della scomposizione di più forze in una è completamente determinato. Lo stesso accade nella risoluzione di una forza in un N.° qualunque di forze ad essa parallele

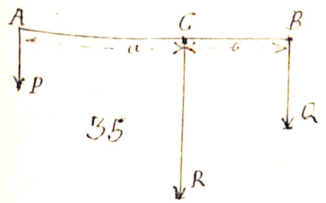


Fig. 55

Per es.° sia la forza R applicata in C da scomporsi in 2 altre forze alle medesime parallele; fra R e le sue indeterminate P, Q, a, b, esistono (Lez.ne XI) le relazioni

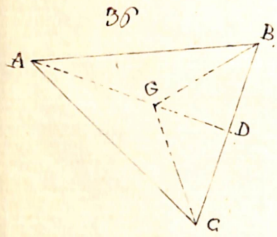
$$P+Q=R \quad \text{e} \quad P:Q::b:a.$$

Che vedesi che è necessario dare ancora 2 delle grandezze P, Q, a, b, affinchè il problema sia determinato. Essendo dati P e a, b; e allora si ha $P=R\frac{b}{a+b}$ $Q=R\frac{a}{a+b}$; ognun 2.° P, Q, e allora si ha. $a=c\frac{Q}{R}$ $b=c\frac{P}{R}$, ove c è la distanza AB. Ma due ancora danno questo caso perchè la 1.° eq.ne $P+Q=R$ diventa inutile con questi dati; 3.° P, a. e allora si ha $Q=R-P$; $b=a\frac{P}{R-P}$. Finalmente 4.°, P, b e allora si ha. $Q=R-P$

$a = b\frac{R-P}{P}$ Tutti gli altri casi entrano in questi.

Se è determinato il problema della risoluzione di una forza in 2 parallele, a fortiori lo dee essere quello della risoluzione di una forza in 3 forze parallele; perchè per eseguire tale scomposizione si dovrà dapprima la data forza in 2, poi una di queste ancora in 2. Ma operando questo problema può diventare determinato aggiungendovi un N.° sufficiente di condizioni. Noi ci occuperemo solo del caso in cui siano dati i 3 punti di applicazione delle 3 componenti da si dovrà trovare, in valore assoluto.

Sia al punto G applicata una forza S, da si debba risolvere in 3 forze, parallele applicate ai 3 punti A, B, C, posti con G nello stesso piano. Uniscasi il punto G con uno dei 3 punti per es. A e prolunga GA, finchè incontri la retta BC in D, scompongo la forza S in 2 parallele, P applicata al punto A e X applicata al punto D, avremo (lez XI)



$$S : P :: X :: AD : GD : GA. \quad (1)$$

Di qui si potrebbe ricavare P ed X. Risolvo ora la forza X applicata in D in 2 altre parallele, Q applicata in B, R applicata in C. si avrà ancora

$$Q : R :: X :: DC : DB : CB \quad (2)$$

Moltiplicando i consequenti della 1ª per CB e quelli della 2ª per AG risulterà.

$$S : P : X :: AD \times CB : GD \times CB : GA \times CB.$$

$$Q : R : X :: DC \times AG : DB \times AG : GA \times CB.$$

Queste 2 proporzioni avendo il rapporto $X : GA \times CB$ comune, daranno.

$$S' : P : Q : R :: AD \times BC : GD \times BC : DC \times GA : DB \times GA . \quad (2)$$

Ora si ha area del triangolo $ABC = \frac{1}{2} AD \times BC \operatorname{sen} ADC$;

area del triangolo $BGC = \frac{1}{2} GD \times BC \operatorname{sen} ADC$;

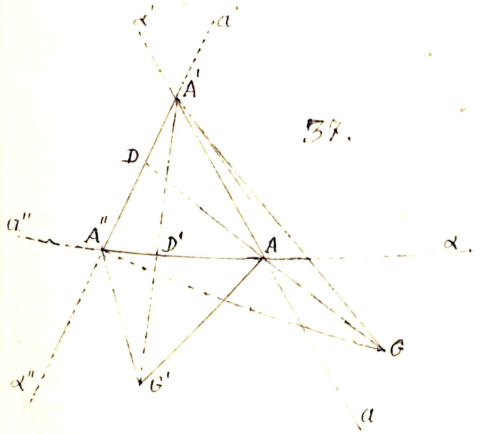
area del triangolo $AGC = \frac{1}{2} DC \times GA \operatorname{sen} ADC$;

area del triangolo $AGB = \frac{1}{2} GA \times DB \operatorname{sen} ADC$;

Nei consequenti della ultima proporzione potremo dunque ai prodotti di quelle linee sostituire i corrispondenti triangoli e le aree.

$$S : P : Q : R :: ABC : BGC : AGC : AGB. \quad (3)$$

Ed ecco spiegato che le 4 forze P, Q, A, S, stanno fra di loro come le aree dei triangoli compresi fra i punti d'applicazione delle altre 3. Questo teorema fu per la 1ª volta stabilito da EULERO. (nato a Basilea nel 1707, morto a Pietroburgo nel 1783). Esso sussiste qualunque sia la posizione del punto G; ma se si trasporta G fuori del triangolo ABC succedono delle modificazioni nel segno di alcune fra le 3 forze. Difatti prolunghiamo i 3 lati del triangolo ABC indefinitamente (fig 37) lo spazio che è fuori del triangolo risulterà diviso in 6 parti di cui alcune saranno dentro gli angoli del triangolo come $a'A'A\alpha$, $aAA''\alpha''$, $a''A''A'\alpha'$ e le altre saranno negli angoli opposti al vertice agli angoli del triangolo come $aA\alpha$, $a'A'\alpha'$ $a''A''\alpha''$. Ha il punto G in uno dei punti dei 3



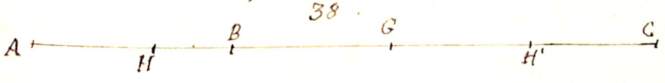
37.

spari, come G'. Tirando dall'angolo A' in cui è compreso la G'A', e scomponendo la forza applicata in G' in 2 altre applicate in A' D', è facile vedere che la forza X applicata in D' sarà positiva, mentre la forza applicata in A' cioè P sarà negativa. Siccome D' è posto fra A e A'', le forze Q, R in cui si risolve X saranno positive; dimodochè la sola forza P sarà negativa: e conseguentemente se si contano come negative le aree dei triangoli compresi fra i punti di applicazione e posti fuori interamente del triangolo AA'A'', il triangolo AG'A'' che nella proporzione (3) corrisponde alla forza P sarà negativo.

Supponga ora che il punto d'applicazione sia posto entro uno degli angoli opposti al vertice di quelli del triangolo, come in G; tirata GA e prolungata fino in D, la forza X applicata in D sarà negativa e positiva la forza P applicata in A. Siccome poi D è posto fra A' ed A'' punti d'applicazione delle forze Q, R, le 2 componenti Q, R, avranno lo stesso segno di X e saranno ambe negative; ciò che ~~vale~~ per altra parte è dimostrato ugualmente coi triangoli A'AG, A''AG che nella proporzione (3) corrispondono alle forze Q, R. e che sono entrambi negativi, come posti interamente fuori del triangolo AA'A''.

Nel caso in cui il punto G si trovasse sopra uno dei lati del triangolo come in D, la forza applicata in A diventerebbe nulla, e le altre 2 forze applicate in A', A'', starebbero fra di loro come i triangoli ADA'', ADA', cioè come le linee DA'' DA' (Elementi). Vale a dire questo caso si riduce alla scomposizione della forza applicata in D in 2 applicate ai punti A' A''. Nel caso poi in cui i 3 punti dati fossero in linea retta come A'DA'', il triangolo AA'A'' si ridurrebbe

alla linea AA'' e se G fosse fuori di essa come in G, l'enunciato del problema sarebbe assurdo. Difatti supponiamo che si diano le componenti applicate ai 3 punti A', A'', D; componendo queste 3 forze la risultante sarà sicuramente applicata in un punto della $A'A''$ e non fuori come prescrive l'ipotesi. È necessario dunque in questo caso che egiando il punto G si trovi sulla $A'A''$. Ma fatta questa supposizione il problema non ha che un solo possibile ammette un infinità di soluzioni. Ne daremo in seguito un altro modo! Sia la forza data applicata al punto G e i 3 punti ai vertici



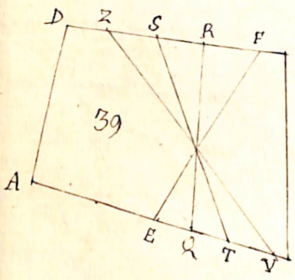
applicare le componenti

P. Q. R. siano A_1, B, C. Prendo ad arbitrio sulla AC 2 punti H ed H' talchè sia $GH = x$, $GH' = y$. Faccio poi $AG = a$, $BG = b$, $GC = c$; decomponendo G in 2 forze X, Y, applicate in H, H' ecc. eliminando S la forza applicata in G, $X = S\frac{y}{x+y}$; $Y = S\frac{x}{x+y}$. Decomponga sia la forza H, o X in 2 applicate ai punti A, B. Sarà chiamando A_1 la componente applicata in A, B_1 quella applicata in B, $A_1 = X\frac{HB}{AB} = X\frac{x-b}{a-b}$; $B_1 = X\frac{HA}{AB} = X\frac{a-x}{a-b}$ Similmente decomponendo la Y in 2 parallele applicate ai punti B e C come B_2 e C_1 si avrà. $B_2 = Y\frac{H'C}{BC} = Y\frac{c-y}{b+c}$; e così $C_1 = Y\frac{BH'}{BC} = Y\frac{b+y}{b+c}$. Avremo dunque la S scomposta in 3 forze parallele delle quali la A_1 è applicata in A, ed è eguale $X\frac{x-b}{a-b} = \frac{Sy(x-b)}{(x+y)(a-b)}$ in B è applicata la $B_1 + B_2 = X\frac{a-x}{a-b} + Y\frac{c-y}{b+c} = S\left\{\frac{y(a-x)}{(x+y)(a-b)} + \frac{x(c-y)}{(x+y)(b+c)}\right\} =$ $\frac{S}{x+y}\left\{y\frac{a-x}{a-b} + x\frac{c-y}{b+c}\right\}$ in C è applicata la $C_1 = \frac{Sx(b+y)}{(x+y)(b+c)}$.

Le 3 forze A_1, B_1+B_2, C_1 sono componenti della forza S: ma ricerche x ed y che entrano nelle loro espressioni proporo variare senza che cessino d'avere delle

componenti convenienti, dee concludersi essere tante reazioni quante sono l'incognite da risolversi cioè x ed y vale a dire infinite.

Trovi dunque di questo caso singolare la risoluzione d'una forza in 3 parallele a 3 punti dati applicati è problema determinato. Non così determinato sarebbe quello della risoluzione di una forza applicata al punto G in 4 parallele applicate a 4 punti dati A, B, C, D. Difatti se pel punto G condurro una retta qualunque parallela ZV terminata ai 2 lati opposti del quadrilatero ABCD e risolvo la forza



S in 2 agenti nei punti Z. V. poi la 1ma 2 agenti nei punti D. C. la 2ª in 2 agenti nei punti A, B, avrò eseguita la risoluzione domandata. Or siccome infinite sono le rette ZV, ST RQ ecc... così posso condurre per G ai 2 lati opposti del quadrilatero infinite maniere di risoluzione si avranno.

Ad alcuni non piacque tale ragionamento e sostennero che il problema era determinato allegando diversi altri argomenti. Leggerissima una tavola gravata da un peso il peso si distribuirà fra le 4 gambe della tavola e ci opponiamo alla caduta del corpo 4 forze ben determinate, eppure il peso darà potere scomporsi in 4 forze verticali eguali ed opposte alla resistenza del suolo ecc. ecc. per ciascun piede

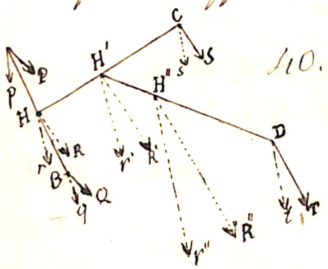
A ciò si risponde che se tutti i 4 piedi sono gravati in punto ciò proviene dalla non assoluta rigidezza del piano della tavola; per la quale il peso si distribuisce sui sostegni. Ma ponendo una tavola perfettamente rigida: generalmente parlando in certo dei 4 sostegni l'equilibrio sussisterà ancora; onde il 4° sostegno viene ad essere affatto superfluo e la pressione sul quale esercitata viene ad esser nulla, e lo sforzo del peso non viene distribuito che sui 3 sostegni.

(Vedi tavole 40-41.)

LEZIONE XIV

Invariabilità del punto d'applicazione della risultante di più forze parallele comunque di questo si muti la direzione – Centro delle forze parallele – Formole per trovarne immediatamente la posizione – Loro discussione – Momento di una forza rispetto ad un piano – Teorema sui momenti delle forze parallele – Composizione e risoluzione delle forze parallele per mezzo dei momenti loro.

Nelle formole stabilite per la composizione delle forze parallele la retta posizione del punto d'applicazione della risultante, essendo indipendente dall'angolo che fanno colla retta cui sono applicate & questi punti forze medesime, segue che il punto H d'applicazione della risultante R di 2 forze P, Q conserverà la stessa posizione anche quando le componenti volteranno direzione si trasporteranno in p, in q tenendosi sempre fra di loro parallele



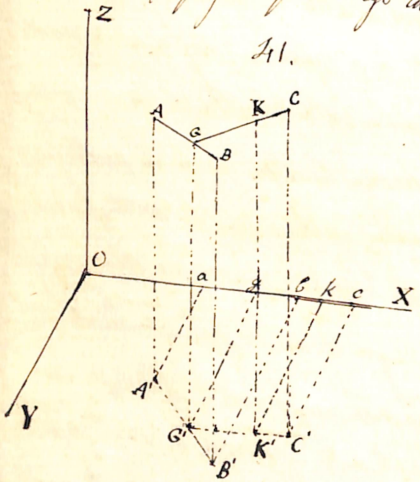
110.

L'unica cosa che varii in questa mutazione fra gli elementi della risultante, è la sola direzione, che sappiamo dover esser parallela alle componenti. La stessa cosa accade quando le forze componenti sono 3 come P, Q, S, applicate ai punti A, B, C, poiché se esse cangiano direzione tenendosi parallele alle medesime, la risultante applicata in H muterà direzione tenendosi parallela a S; la posizione di H non sarà mutata quindi il punto d'applicazione delle 3 forze non varierà. Questa verità potendosi di leggieri applicare a un numero qualunque di forze, ne segue che in ogni sistema di forze parallele ridurrà a una risultante unica, se si mutano in uno le direzioni di

di tutte le forze mantenendo però costante il loro parallelismo, il loro punto d'applicazione, e le loro intensità relative, non si muta la posizione del punto d'applicazione della risultante.

Il punto per cui costantemente passa la risultante di un sistema di forze comunque di quelle si muti la direzione, dicesi centro delle forze parallele. Si troverà il centro delle forze parallele cercando geometricamente il punto d'applicazione della risultante di queste forze. E dato comunque il centro delle forze parallele si trova la risultante, e si congiungono quelle forze applicando al centro una forza parallela alle date ed eguale alla loro somma algebrica. Vi sono delle formole analitiche, mercè cui è facile trovare il centro delle forze parallele di un sistema di forze senza passare per alcuno costrutto geometrico, ora indicato

Fig. 11.



Siano A. B 2 punti cui siano applicate le forze P, P'. Riferendole a 3 assi di coordinate si abbassino AA', A'a, e BB', B'b. cercheremo il punto G d'applicazione della risultante; proiettiamo similmente G in G' e G' in G, noi avremo per un teorema di Geometria $\frac{AG}{GB} = \frac{A'G'}{G'B'} = \frac{ag}{gb}$ siano x, y, z le coordinate del punto A; $x' y' z'$ quelle del punto B; x_1, y_1, z_1 quelle del punto d'applicazione della risultante noi avremo $ag = Og - Oa = x_1 - x$; e $gb = x' - x_1$; dunque

$$\frac{x_1 - x}{x' - x_1} = \frac{AG}{GB} = \frac{P'}{P}$$ di qui si ricava $x_1 = \frac{Px + P'x'}{P + P'}$ Fingasi una 3ª forza R applicata in C. le cui coordinate sono x'', y'', z'', noi avremo la risultante

delle 3 forze P, Q, R. Se si corrisponga R'' con P+Q a quel modo che si è fatto di P con Q; solo bisognerà nella formola che dà il valore di x_1 sostituire ad x_1 x_2 ascissa della risultante delle R e P+Q, a P, ~~Q~~ sostituire P+Q a x, x_1 a P', P'' a x' x''; e avremo $x_2 = \dfrac{(P+P')x_1 + P''x''}{P+P'+P''}$

e sostituendo a x_1 il suo valore avremo $x_2 = \dfrac{Px + P'x' + P''x''}{P+P'+P''}$

A questo modo procedendo avanti sino a che n'abbiamo composte tutte le forze se P, P' P'' P''' ... $P^{(n)}$ siano le forze, x, y, z; x', y', z'; ..... $x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}$; siano le coordinate dei corrispondenti punti d'applicazione e x_u, y_u, z_u; siano le coordinate del punto d'applicazione della risultante sarà.

$$x_u = \frac{Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots + P^{(n)}x^{(n)}}{P + P' + P'' + P''' + \ldots + P^{(n)}}$$

Questo sarebbe il valore dell'ascissa del punto d'applicazione. Quanto alle ordinate è evidente che ripetendo continuti ragionamenti si avrebbero formole analoghe; cosicchè il punto d'applicazione della risultante, ossia il centro delle forze parallele sarebbe determinato dalle coordinate

$$(A)\quad \begin{cases} x_u = \dfrac{Px + P'x' + P''x'' + P'''x''' + \ldots + P^{(n)}x^{(n)}}{P + P' + P'' + P''' + \ldots + P^{(n)}} = \dfrac{\Sigma Px}{\Sigma P} \\ y_u = \dfrac{Py + P'y' + P''y'' + P'''y''' + \ldots + P^{(n)}y^{(n)}}{P + P' + P'' + P''' + \ldots + P^{(n)}} = \dfrac{\Sigma Py}{\Sigma P} \\ z_u = \dfrac{Pz + P'z' + P''z'' + P'''z''' + \ldots + P^{(n)}z^{(n)}}{P + P' + P'' + P''' + \ldots + P^{(n)}} = \dfrac{\Sigma Pz}{\Sigma P} \end{cases}$$

Se una forza fosse negativa bisognerebbe conservarle in questa formola il suo segno, e lo stesso dicasi delle coordinate dei punti di applicazione – Laonde le formole (A) possono enunciarsi sotto forma di teorema; l'ascissa (o l'ordinata) del centro delle forze parallele è eguale alla somma algebrica dei prodotti di ciascuna forza per la distanza del suo punto d'applicazione dal piano xz ($o\ yz$ o xy)

divisa per la somma algebrica delle forze medesime

Quando uno dei 3 numeratori va a zero senza che zero sia il denominatore la coordinata corrispondente del centro delle forze parallele è zero e tal centro trovasi in uno dei piani coordinati; se 2 numeratori vanno a zero separatamente il centro trovasi sopra uno degl'assi; finalmente se tutti e 3 vanno a zero il centro cercato è all'origine.

Nel caso in cui solo il denominatore va a zero, le coordinate del centro sono infinite (e basta che anche 2 o una sola tale sia impossibile ottenere una risultante unica, non vi sarà centro, e il sistema di tutte le forze potrà ridursi ad una coppia. Quando poi i numeratori e denominatori vadano a zero, le coordinate del centro diventano indeterminate, e veramente in questo caso la somma delle forze essendo nulla, e non avendo luogo la coppia, il sistema produce l'equilibrio, non avendovi in tal caso risultante, ogni punto dello spazio può considerarsi come suo punto d'applicazione o come centro delle forze.

Quando tutti i punti d'applicazione delle forze sono posti in un piano che poniamo p. e prendere per piano xy, si avrà $z' = z'' = z''' \ldots = z^{(n)} = 0$ il che dà pure $\Sigma z = 0$; vale a dire il centro di più forze parallele ad altrettanti punti posti in un piano, è situato in questo medesimo piano. Similmente proverebbesi che il centro delle forze parallele applicate a più punti di una retta è posto sulla medesima retta

I termini Px, $P'x'$, $P''x''$ ... ecc che entrano nell'espressione dell'ascissa x_p e che rappresentano i prodotti delle forze P, P', P'', ... per le distanze dei loro punti d'applicazione dal piano zy ricorrono spesso nella Meccanica, e perciò si dà il nome di momenti delle forze P, P', P'' ... rispetto al piano zy. Se

generale dicesi momento di una forza rispetto ad un piano il prodotto dell'intensità della forza per la distanza del suo punto d'applicazione dal piano. Il momento di una forza può esser positivo o negativo secondo la varia combinazione dei segni dei due fattori che vi entrano.

Applicando questa denominazione all'enunciato del teorema espresso dalle formole (A) ed osservando che $P+P'+P''+\dots+P^{(n)}$ non è in sostanza che la risultante S del sistema, diremo; che l'ascissa (o l'ordinata) del centro di più forze parallele è la somma dei momenti di quelle forze rispetto al piano zy o (xy o zx) diviso per la loro risultante. Le formole (A) diventeranno $x_u = \frac{\Sigma Px}{S}$ $y_u = \frac{\Sigma Py}{S}$ $z_u = \frac{\Sigma Pz}{S}$ onde

$$Sx_u = \Sigma Px\,;\quad Sy_u = \Sigma Py\,;\quad Sz_u = \Sigma Pz \qquad (B)$$

Ora Sx_u è evidentemente il momento della risultante S rispetto al piano zy e così Sy_u, Sz_u sono i momenti della risultante rispetto ai piani zx xy; enunciamo questo bellissimo ed importantissimo teorema.

Il momento della risultante di un sistema qualunque di forze parallele rispetto a qualsivoglia piano è eguale alla somma dei momenti delle componenti rispetto allo stesso piano.

Coll'ajuto di questo teorema la composizione e la scomposizione delle forze parallele diventa facile. Ritenendo le stesse denominazioni, fra le posizioni dei punti d'applicazione delle componenti e della risultante, e le grandezze di queste forze esistono le sei relazioni.

$$S = P+P'+P''+\dots+P^{(n)};\quad Sx_u = Px+P'x'+\dots+P^{(n)}x^{(n)};\quad Sy_u = Py+P'y'+\dots+P^{(n)}y^{(n)}.$$

$$Sz_1 = pz + p'z' + \dots p^{(n)} z^{(n)} \quad (C)$$

È facile vedere in queste formole che il problema della composizione di più forze è determinato; perchè in questo caso sono date $p, p', \dots p^{(n)}$; x, y, z; x', y', z'; $\dots x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}$; e le quantità incognite sono parimente n cioè S, x_u, y_u, z_u; e le eq^{ni} sono pure n. Quando i punti d'applicazione sono tutti posti in un piano che possiamo prendere per piano xy, una delle incognite cioè z_u sparisce; ma sparisce altresì l'eq^{ne} $Sz_u = \Sigma pz$ che diventa $0 = 0$ E quando i punti d'applicazione sono tutti in una retta che possiamo assumere per asse delle x spariscono 2 incognite z_u y_u e altresì 2 equazioni $Sz_u = \Sigma pz$; $Sy_u = \Sigma py$. Finalmente se le forze parallele sono tutte applicate in un punto che possiamo assumere per origine spariranno 3 incognite e ancora 3 eq^{ni} restandovi la sola nota relazione $S = \Sigma p$

Quanto alla risoluzione delle forze vedesi il problema sarà determinato quando n hanno tante incognite quante sono le eq^{ni} cioè data la risultante S e il suo punto d'applicazione x_u, y_u, z_u, e i punti di applicazione di n forze non poste nello stesso piano, è possibile scomporre S in queste n forze perchè si ha chiamando $\theta, \theta', \theta'', \theta'''$ le n incognite

1° $\theta + \theta' + \theta'' + \theta''' = S$ —— 2° $\theta x + \theta' x' + \theta'' x'' + \theta''' x''' = Sx_u$

3° $\theta y + \theta' y' + \theta'' y'' + \theta''' y''' = Sy_u$ —— n^{o} $\theta z + \theta' z' + \theta'' z'' + \theta''' z''' = Sz_u$

Dalle quali n eq^{ni} generalmente risulteranno per $\theta, \theta', \theta'', \theta'''$ valori finiti. Se le forze e i punti d'applicazione nello spazio fossero più di n ci sarebbero più di n incognite ed il problema sarebbe indeterminato.

Quando poi tutti i punti d'applicazione delle forze sono in uno stesso piano

una delle 4 eq. precedenti sparisce; dimodochè la scomposizione in 4 o più forze di cui i dati punti d'applicazione siano tutti in un piano è indeterminata; sarebbe determinata per 3 forze.

(1) $\theta+\theta'+\theta''=S$ (2) $\theta x+\theta' x'+\theta'' x''=Sx_u$ (3) $\theta y+\theta' y'+\theta'' y''=Sy_u$

Finalmente se i 3 punti d'applicazione di θ, θ', θ'' fossero in una medesima retta, presa questa per asse x si annullerebbe l'ultima di queste 3 eq. Dunque la scomposizione di una forza in 3 o più di cui i punti d'applicazione siano tutti sopra una retta è ancora indeterminata; per determinarla bastano 2 forze θ, θ' onde

(1) $\theta+\theta'=S$ (2) $\theta x+\theta' x'=Sx_u$

Finalmente se ancora i punti d'applicazione delle forze sono in un punto che possiamo supporre per origine, sparisce la 2ª di queste eq. e per 2 o più forze sarebbe indeterminata la risoluzione. Per renderla determinata basta una forza, ed allora si ha l'unica eq. di significato ben noto $\theta=S$

(Venturoli 76-81, 84-88; Poisson 82-86)

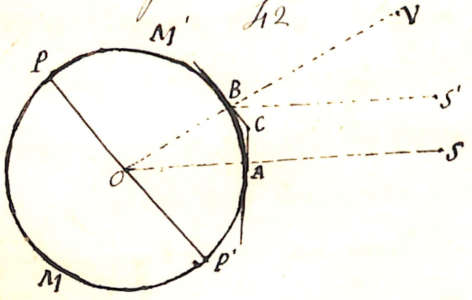
LEZIONE XV.

Caduta dei corpi – Gravità e piano di livello – Convergenza delle verticali e sfericità della terra – Peso d'un corpo – Sua proporzionalità alla massa – Prova sperimentale – Modo di determinare il peso di un corpo – Densità e suoi rapporti colla massa e col volume – Peso specifico e suoi rapporti col peso assoluto e colla massa – Unità di densità e di peso specifico – Corpi omogenei ed eterogenei – Che cosa debbasi intendere per densità di un corpo eterogeneo in un dato punto.

Tutti i corpi che sono sulla superficie della terra, di qualunque grandezza o natura siano abbandonati liberamente a loro stessi si precipitano verso la superficie della terra, e quando sono sostenuti, esercitano una pressione sul loro appoggio dovuta alla tendenza che hanno a cadere. Questo moto d'alto al basso di cui ad ogni momento si hanno infiniti esempi ha per causa una forza. Si chiama gravità la forza che produce questo moto questa tendenza. Ogni molecola d'un corpo essendo con una certa forza tirata al basso, l'azione della gravità sopra il corpo è la risultante di tutte le forze che tendono a far cadere ciascuna molecola del corpo. Questa risultante varia d'intensità da un corpo all'altro, e lo sforzo che un corpo animato da questa risultante fa per cadere, misurato nella sua intensità, dicesi peso del corpo.

È confermato per giornaliera esperienza che un corpo cadendo percorre una linea retta perpendicolare alla superficie delle acque

stagnanti. La quale sebbene per ristrette spazio sia un piano perfettamente orizzontale, o almeno che può come tale considerarsi, tuttavia è dimostrato per infinite osservazioni esser sensibilmente sferica nel suo avvolgersi intorno al nucleo solido della terra. Ogni superficie di acque stagnante è dunque una porzione di superficie sferica avente per raggio il raggio della terra. Tuttavia è facile dimostrare, che per distanze anche di certa grandezza, e per quelle dimensioni che hanno ordinariamente i corpi nella superficie della terra, la superficie delle acque stagnanti si può sensibilmente confondere con un piano tangente al globo terrestre, e che le linee che percorrono i varii elementi di un corpo qualunque, se fossero sfogati; ossia le verticali di quel corpo e di tutti i suoi punti possono riguardarsi come parallele. Sfolti sia MP'M'P un circolo massimo del globo terracqueo; sia in A un osservatore che osservi una stella al suo zenith S. Nello stesso tempo un altro osservatore posto in B osservi la medesima stella: C vedrà in S non secondo la sua verticale BV ortogonale alla superficie piana tangente alla superficie di livello BC ma inclinata dell'angolo VBS



Siccome poi la distanza AS della stella è infinitamente grande rispetto alla terra, l'angolo BSA sarà infinitamente piccolo e le due rette BS, AS saranno parallele. Similmodo l'osservatore B vedrà la stella in SB parallela con la verticale l'angolo S'BV = BOA. In questo modo dall'angolo SBV si deduce

. il N.° dei gradi contenuti nell'arco BCA. Ora la lunghezza assoluta dell'arco BCA che si può misurare direttamente è eguale a $\pi OA \times \frac{BOA}{180^\circ} = \delta$

Di qui si conclude $OA = \frac{\delta}{\pi} \times \frac{180^\circ}{BOA}$. Questo è il modo di misurare il raggio della terra usato da Eratostene (di Cirene vivente verso il 275 A. C) che lo inventò, risalendo ai giorni nostri. Si trova così che se $BOA = 1^\circ$, l'arco BA misurato è di 111 Chil. 111. Onde si deduce il raggio OA di 6366 Chil. La periferia della terra di 40 milioni di metri, la lunghezza dell'arco di un minuto primo = 1852 m., quella dell'arco di 1" = 31 m. Le verticali condotte da due luoghi distanti fra loro di 31 m. fanno al centro della terra un angolo di un secondo fra di loro. I corpi che noi consideriamo non percorrendo quasi mai la dimensione di 31 m. in senso orizzontale, segue che possono le loro verticali considerarsi come parallele, poichè l'angolo di 1" è inapprezzabile nelle più minute osservazioni.

Noi ignoriamo quale sia la natura di questa forza che chiamiamo gravità, ma ne possiamo però ben apprezzare gli effetti. Siccome essa esplica con una certa energia sopra tutte le molecole di un corpo secondo la verticale di ciascuna, segue da ciò che abbiamo premesso che tali forze potendosi considerare come parallele (verticali) noi possiamo alla teoria della inerzia e del peso dei corpi applicare quella delle forze parallele. Dobbiamo però ora trattenerci prima di uno dei più importanti effetti della gravità il peso.

Si è detto esser il peso assoluto d'un corpo l'intensità della risultante di tutte le forze che sollecitano ciascuna molecola del corpo a cadere per la verticale, quindi la forza che produce quest'effetto dicesi gravità verticale. Pel parallelismo delle forze applicate alle singole molecole, la risultante o il peso deve esser eguale alla loro somma; ora dicesi la massa di un corpo è

proporzionale alla quantità di materia, o al numero di molecole che esso contiene, segue che il peso sarà proporzionale al N° delle molecole o alla massa = nell'ipotesi che l'azione della gravità sia la stessa per ciascuna molecola.

Per dimostrare incontestabilmente, introdotti in un lungo tubo molti pezzi di varie sostanze e varie grandezze si vuota d'aria e si capovolge. Se il tubo è di vetro si vedono i varii corpi giungere nel medesimo tempo e con la stessa velocità negli stessi luoghi del tubo e toccare contemporaneamente il fondo. Che idea ne dee concludere? Due forze che imprimono a masse diseguali velocità eguali in tempi eguali stanno fra di loro come le masse; dunque la forza che spinge la massa A a precipitarsi al basso, sarà doppia di quella che spinge la massa B. Pesi dei corpi saranno dunque proporzionali alle masse e la gravità si distribuirà uniformemente su tutte le particelle d'un corpo.

Noi potremo dunque misurare la gravità nella sua intensità prendendo per unità della medesima la forza o il peso che corrisponde all'unità di massa. Si vedrà più avanti le ragioni che giustificheranno la scelta che faremmo ora dell'unità di massa, prendendola tale che il suo peso sia di $9,^{Chil.}808$. Chiamando dunque g la gravità agente sull'unità di massa noi avremo $g = 9,^{Chil.}808$

Sia dunque M una massa, essa conterrà M volte la massa presa per unità; siccome il peso è proporzionale alla massa, se sia P il peso assoluto di un corpo noi avremo $M : 1 :: P : g$ onde $P = Mg$ $M = \frac{P}{g}$. Il peso di un corpo si può determinare direttamente paragonandolo con l'unità di peso; dividendolo per g si avrà la massa del medesimo. La formula $P = Mg$ ci fa vedere che i pesi sono proporzionali alle masse per lo stesso valore di g, e che gli stessi sono proporzionali al valore di g per masse eguali. La quantità g che d'ora in avanti si chiamerà semplicemente gravità si è riconosciuta variabile nei

varii luoghi della terra; per es sulle alte montagne è non che nelle pianure e sotto la linea equinoziale è minore che al polo. Supponiamo che siano g, g' i valori della gravità in 2 luoghi differenti; 2 masse eguali peseranno rispettivamente Mg, Mg'. E due pesi eguali avranno le masse $\frac{P}{g}$; $\frac{P}{g'}$. Il che equivale a dire che due masse eguali hanno pesi diversi nei 2 luoghi e proporzionali alle gravità dei medesimi luoghi; 2 pesi eguali nei 2 luoghi hanno masse inversamente proporzionali alle gravità dei luoghi.

È universalmente riconosciuto che non tutti i corpi sotto un eguale volume comprendono un egual massa. Poichè i pori dei diversi corpi essendo distribuiti nelle diverse loro specie in quantità più o meno grande, 2 volumi di sostanze diverse generalmente hanno una massa diversa. Pieni densità la proprietà che hanno i corpi di racchiudere più o meno massa sotto lo stesso volume. È chiaro che di 2 corpi dei quali l'uno comprenda la massa M, l'altro la massa KM sotto eguali volumi il 2° sarà K volte più denso del 1°, o la densità del 2° eguaglierà K volte la densità del 1°; segue da ciò che le densità di 2 corpi sono proporzionali alle masse che essi contengono sotto eguali volumi. Per esprimere la densità di un corpo si valuta la massa che esso contiene nell'unità di volume; è chiaro che questo N^{mo} eletto per valor delle densità, soddisfa alla condizione di essere proporzionale alla massa del corpo contenuta sotto un volume costante per tutti i corpi. Sia M la massa di un corpo, V il volume del medesimo, D la densità o la massa contenuta nel volume I, noi avremo la proporzione $M : V :: D : I$, supponendo il corpo di egual densità in tutta la sua estensione. Di qui ricavasi $M = D\frac{V}{I}$ cioè la massa di un corpo è eguale alla

massa contenuta nell'unità di volume, nel rapporto del volume del corpo all'unità di volume. Si scrive questa formola più brevemente $M = DV$ ed enunzia più presto dicendo che la massa di un corpo eguaglia la densità pel volume. Dalla stessa formola ricavasi ancora $D = M\frac{1}{V}$ cioè la densità della ~~un~~ corpo è eguale alla massa del medesimo pel rapporto dell'unità del volume al volume del corpo; e questo si enunzia meno precisamente ma più comunemente scrivendo $D = \frac{M}{V}$ cioè la densità di un corpo è espressa dalla sua massa divisa pel volume. Intendiamo sempre che la espressione della densità sia la massa contenuta nell'unità di volume.

I pesi essendo proporzionali alle masse, se i corpi sotto eguali volumi possono contenere diverse masse, essendo sotto eguali volumi potranno aver diversi pesi, ciò che l'esperienza conferma. La proprietà di racchiudere sotto egual volume più o meno peso chiamasi peso specifico di un corpo. È evidente che il peso specifico di un corpo è proporzionale alla massa di quel corpo contenuta sotto l'unità di volume ossia alla densità. Il peso specifico sarà ancora proporzionale al peso assoluto contenuto nell'unità di volume; anzi si assume per misura del peso specifico di un corpo il peso assoluto, che esso contiene sotto l'unità di volume. Sia P il peso assoluto di un corpo G il peso specifico, V il volume dello stesso sarà $P : V :: G : 1$ onde $P = G\frac{V}{1}$ o più precisamente $P = GV$ Il peso assoluto di un corpo eguaglia il peso specifico pel volume. E similmente $G = P\frac{1}{V} = \frac{P}{V}$; il peso specifico è il rapporto del peso assoluto al volume. Ordinariamente alla densità e al peso specifico si dà un senso alquanto diverso, riferendoli alle densità e al peso specifico di un corpo

noto e comune come l'acqua. Si usa assumere per unità di densità e di peso specifico, la densità e il peso specifico dell'acqua. In questa convenzione si ha sempre $P = D$ essendo eguali le loro unità

(Porfiri 89-92 Venturoli 89-93)

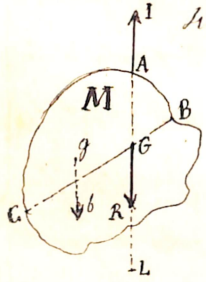
LEZIONE XVI

Centro delle forze parallele di gravità o centro di gravità – In esso si può supporre ridotto tutto il peso del corpo – Metodo meccanico per determinarlo – Determinazione del centro di gravità di un sistema rigido di punti, e di corpi dei quali si conoscono i centri particolari di gravità – Centro di massa e di inerzia – Centro di volume quando il sistema è omogeneo.

Poichè in ogni sistema di forze parallele applicate ad altrettanti punti si può sempre assegnare un punto invariabile per il quale passa costantemente la risultante del sistema comunque si muti la direzione delle forze, ogni corpo potendosi considerare come un aggregato di punti a ciascuno dei quali è applicata una delle forze parallele di gravità avrà un punto per cui passa costantemente la risultante di tutte queste forze. Dicesi centro di gravità di un corpo quel punto per cui costantemente passa la risultante di tutte le forze che sollecitano i suoi elementi qualunque sia la direzione di queste forze, o meglio (siccome della gravità

non si può cangiar la direzione) qualunque sia la disposizione del corpo. Siccome alle forze particolari che animano ciascun elemento si può sostituire (quanto all'effetto dinamico) la risultante, il centro di gravità sarà quello su cui potrà concepirsi come agente la risultante di tutte le forze parziali; quello per conseguenza in cui tutto il peso del corpo può considerarsi riunito. Di qui il nome di centro di gravità.

Si dice che quando si considera solo l'effetto dinamico si può sostituire la risultante alle componenti. Questo è facile a scorgersi e deriva immediatamente dalla teoria della composizione delle forze. Ma per quel che riguarda la pressione tensione o inflessione del corpo, nella loro considerazione non è lecito sostituire la risultante alle componenti, eppero nemmeno nel caso della risultante e delle componenti di gravità. Così una verga flessibile è in equilibrio tanto quando è sostenuta per le estremità, quanto quando è solo sostenuta nel mezzo. Ma la tensione, pressione, e flessione della verga nel 1° caso sono ben diverse da quelle del 2° caso. —



113

Ogni volta che un corpo M è sospeso per uno dei suoi punti A e sta in equilibrio il centro di gravità è in un punto G della verticale condotta per A. Infatti supponiamo che il centro di gravità in questo caso fosse in g fuori della AL, il corpo M sarebbe in equilibrio fra le due forze che lo sollecitano, gb che è la gravità, AI che agisce in senso verticale e contrario. Siccome le 2 forze AI, gb, per ipotesi non sono direttamente contrarie, esse produrranno una coppia e non equilibrio. Dunque se per il punto di sospensione

di un corpo facciamo passare una verticale ed essa sarà il centro di gravità del corpo

Sospendasi ora il corpo per un altro punto B, dopo che esso si sarà posto in equilibrio, si faccia passare attraverso il corpo una altra verticale, essa pure dovrà contenere il centro di gravità. Le 2 rette AL, BC dovranno dunque incontrarsi e la loro intersezione sarà il centro cercato.

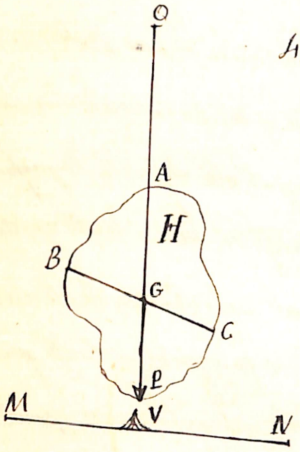


Fig. 44.

Per far questa ricerca in un modo alquanto preciso, si abbassa dal punto O un bricciolino P terminato in punta e nel piano sottoposto NM si elegga una punta opposta V. I due punti O, V saranno sulla medesima verticale, se ora si sospenda in luogo del pesantino il corpo dato H per un punto A in modo che tocchi quasi la punta V.

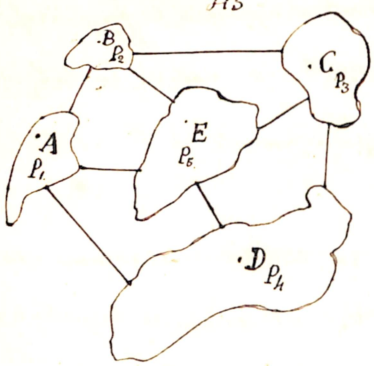
il punto addittato da V e A determineranno una retta AV su cui sarà il centro. E ripetendo l'operazione per un 2° punto B si troverà un'altra retta simile BC e l'intersezione loro darà il punto G

Non rappresenta dello qual che si è detto trovare il centro di gravità di un sistema qualunque di punti o elementi materiali eguali in N.° punto, perchè la questione si riduce a trovare il centro di un certo N.° di forze parallele fra loro eguali Prima di intraprendere la ricerca geometrica dei centri di gravità dei corpi considereremo un caso molto semplice che servirà di scala agli altri.

Sia un sistema di corpi invariabilmente fra loro connessi, di cui si conoscano

i centri di gravità $A, B, C, D \ldots$ ecc. siano i rispettivi pesi di questi corpi.

115



$P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5 \ldots$ ecc. Si domanda il centro di gravità di questo sistema. È evidente che non si tratta d'altro che di comporre le forze $P_1\ P_2\ P_3 \ldots$ ecc. applicate ai punti $A\ B\ C \ldots$ e trovarne il centro. Immagino i centri parziali e noti di gravità riferiti a 3 piani di coordinate, chiamo x_1, y_1, z_1 il centro A ovvero il punto ove s'applica la forza P_1, e similmente $x_2\ y_2\ z_2$ le coordinate di B .. ecc siano $x_u\ y_u\ z_u$ le coordinate del centro cercato sarà.

$$\left.\begin{aligned} x_u &= \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \ldots}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots} = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P} \\ y_u &= \frac{P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3 + \ldots}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots} = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P} \\ z_u &= \frac{P_1z_1 + P_2z_2 + P_3z_3 + \ldots}{P' + P_2 + P_3 + \ldots} = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P.} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Che se all'espressione $P_1\ P_2 \ldots$ vogliasi sostituire l'espressione loro in funzione della massa dei singoli corpi $P_1 = M_1g_1 \quad P_2 = M_2g_2 \ldots$ è facile vedere come nelle formole (1) svanisca la g e ne abbia.

$$x_u = \frac{\Sigma Mx}{\Sigma M}, \quad y_u = \frac{\Sigma My}{\Sigma M}, \quad z_u = \frac{\Sigma Mz}{\Sigma M.} \quad (2)$$

Le quali formole sono identiche alle (1) cangiato P in M. Egli è

perciò che il centro di gravità viene pure denominato centro di massa. Siccome per tanto maggiore è la massa di un corpo, tanto maggiore è la forza necessaria per dargli una data velocità o un dato movimento, o per togliere lo stato di inerzia in cui prima giaceva. così sebben impropriamente egli può dato da taluni il nome di centro d'inerzia.

Se si volesse nelle espressioni di x_u, y_u, z_u introdurre il volume e la densità dei corpi basterebbe chiamare $V_1\ V_2\ V_3$ — il volume dei rispettivi corpi e $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3$ — le rispettive densità per avere $P_{(n)} = V_{(n)}\Delta_{(n)}$

$$x_u = \frac{\Sigma V\Delta x}{\Sigma V\Delta}\ ;\quad y_u = \frac{\Sigma V\Delta y}{\Sigma V\Delta}\ ;\quad z_u = \frac{\Sigma V\Delta z}{\Sigma V\Delta} \qquad (3)$$

Supponiamo che il sistema sia omogeneo cioè la densità uniforme e eguale per tutti i corpi, sparirà il fattore Δ comune ad ambi i termini delle (3) e si avrà. $x_u = \frac{\Sigma Vx}{\Sigma V}\ ;\quad y_u = \frac{\Sigma Vy}{\Sigma V}\ ;\quad z_u = \frac{\Sigma Vz}{\Sigma V}.$ (4)

Le quali equivalgono alle (1) mutando i pesi nei volumi. E perciò che al centro di gravità dei corpi omogenei si diede ancora il nome di centro di volume.

Nota. Il problema di trovare il centro di gravità di un sistema di corpi può esser inverso. Per es se dato il centro di gravità di tutto il sistema e il peso totale si cercasse un peso parziale e un centro di gravità ripetto si avrebbe supponendo che il peso parziale fosse P_1

$$x_1 = \frac{x_u\Sigma P - P_2x^2 - P_3x^3 - \ldots}{\Sigma P - (P_2 + P_3 + \ldots)} \qquad y_1 = \frac{y_u\Sigma P - P_2y_2 - P_3y_3 - \ldots}{\Sigma P - (P_2 + P_3 + \ldots)}$$

$$z_1 = \frac{z_u\Sigma P - P_2z_2 - P_3z_3 - \ldots}{\Sigma P - (P_2 + P_3 + \ldots)}$$

le quali formole si ricavano da (1) osservando che $P_1 = \Sigma P - P_2 - P_3 - \ldots$
Per il caso in cui due soli fossero i corpi e si conoscesse di essi il centro di gravità comune, e la forza del peso totale oltre al peso e al centro parziale di uno di essi le formole diverrebbero.

$$x_1 = \frac{x_u(P_1+P_2) - P_2 x_2}{P_1} \qquad y_1 = \frac{y_u(P_1+P_2) - P_2 y_2}{P_1}$$

$$z_1 = \frac{z_u(P_1+P_2) - P_2 z^2}{P_1}$$

Dove essendo noti $P_1 + P_2$ o ΣP e P_2 si ha $P_1 = \Sigma P - P_2$.

(Venturoli 64-65, Poisson 63-64)

LEZIONE XVII.

Centro di gravità delle **aree** e dei perimetri delle più semplici figure geometriche ed omogenee – Che cosa si intenda per centro di gravità delle linee e delle superficie – Centro di gravità di una retta – di 2 rette ad angolo – del perimetro di un triangolo – Dimostrazione del teorema del centro di gravità dei corpi simmetrici rispetto ad un piano, ad una linea ad un punto, applicazione all'invenzione del centro di gravità dell'area di un triangolo – Centro di gravità di un trapezio e di qualunque quadrilatero – di qualunque poligono e del suo perimetro.

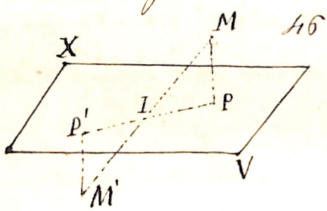
Avanti di procedere alla ricerca del centro di gravità dei corpi più comuni e più semplici, è necessario di avvertire ~~di quanto si~~

che quando si propone di trovare il centro di gravità di un corpo senza enunciare la legge della sua densità, noi riteniamo che quel corpo sia di densità uniforme ovvero omogeneo.

Siccome non vi ha peso senza massa, né massa senza volume, così quando si proporrà di cercare il centro di gravità di una linea o di una superficie, non intenderemo parlare di superficie e linee geometriche (giacchè sarebbe assurdo cercare il centro di gravità di una cosa su cui la gravità nulla può) ma sottintenderemo che siano dotate di grossezza e spessezza quanto si vuole piccola, ma pure sensibile; ovvero siccome in ogni loro punto gravate uniformemente di un infinità di pesi infinitamente piccoli.

Noi poniamo appresso nella ricerca dei centri di gravità ~~con un teorema~~ che riguarda le figure simmetriche rispetto ad un punto, ad una linea, ad un piano. La definizione della simmetria quale si intende in Meccanica, è ben diversa dalla simmetria architettonica, e dalla simmetria geometrica. La differenza dalla prima sarà noto ad ognuno. In geometria poi una figura o un corpo si dice simmetrico rispetto ad un punto, quando facendolo girare in qualunque senso intorno a quel punto occupa esattamente sempre la medesima parte dello spazio; rispetto ad una linea quando piegando la figura intorno ad essa in 2, le 2 parti si ricoprono esattamente, e facendo intorno ad essa girare il solido, esso occupa egual porzione dello spazio e in grandezza e in posizione. Finalmente un solido è simmetrico rispetto ad un piano quando facendo ad esso fare una circonvoluzione di 180°. non muta la porzione da esso occupata la sua posizione. Invece in Meccanica dicesi

simmetrico un solido una superficie, una linea rispetto ad un piano, quando ad ogni minima particella sua posta da una parte del piano si può assegnare la sua corrispondente eguale, e posta ad egual distanza dall'altra parte del piano. Il solido, la superficie, la linea sono simmetrici rispetto ad una linea, quando sono simmetrici rispetto a 2 piani passanti per quella linea; sono simmetrici rispetto ad un punto quando lo sono rispetto a 3 piani condotti pel punto. Or dico che se un solido, una superficie, una linea sono simmetrici rispetto ad un piano, ad una retta ad un punto, hanno nel piano, nella retta, nel punto, il loro centro di gravità



46

Difatti se all elemento pesante M corrisponde sempre un altro elemento M' eguale, e tale che MP = M'P' tirando MM' ella segherà il piano XV nel suo punto di mezzo I, e sarà IM = IM' per l'eguaglianza dei triangoli MPI, M'P'I. Il centro di gravità di gravità dei 2 punti M, M' si troverà in I. Lo stesso proteudosi ripetere per tutte le altre coppie od elementi tutti i centri parziali di gravità si troveranno nel piano — il centro totale

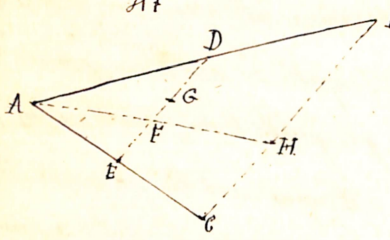
Ciò dimostrato si concede che un corpo simmetrico rispetto ad una retta rezzone di 2 piani, avrà il centro di gravità su ambi i piani ad un tempo epperò nella retta, e che un corpo simmetrico rispetto ad un punto rezzone comune di 3 piani, avrà il centro di gravità su tre piani ad un tempo o nel punto.

Che il centro di gravità di una retta ~~si trova~~ è il suo punto di mezzo è

evidente.

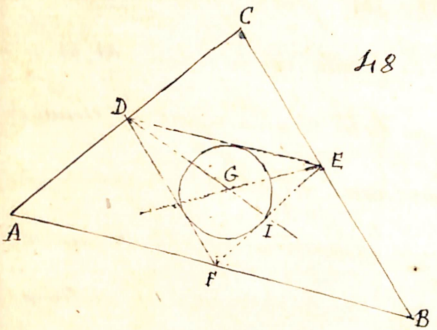
Quando si voglia trovare il centro di gravità di 2 rette ad angolo, AB, AC i loro centri parziali di gravità saranno ai mezzi loro D: E; di quali punti poscia noi intendere applicate 2 forze proporzionali alle rette medesime. Si avrà il centro di gravità dividendo la ED in 2 parti inversamente proporzionali alle AB, AC. Per ciò eseguire bisecato l'angolo BAC colla AH si avrà FD : FE :: AD : AE :: AB : AC. Prendendo DG = FE si avrà GE = FD ovvero GD : GE :: AE : AB, condizione richiesta. Il centro cercato sarà dunque in G

Fig 17



Per trovare il centro di gravità del perimetro di un triangolo ABC noi possiamo immaginare che i pesi dei 3 lati siano raccolti nei rispettivi punti di mezzo D, E, F. dei 3 lati. ~~siano raccolti~~ Tirando DF, FE, DE il triangolo DEF sarà simile ad ABC e si avrà DE : DF : FE :: AB : BC : AC :: peso F : peso E : peso D. I 3 pesi saranno dunque proporzionali ai lati opposti del triangolo DEF. Se volessimo comporre E ed F basterebbe dividere EF in parti inversamente proporzionali ai pesi, e direttamente proporzionali ai lati adjacenti. Divisa l'angolo D per metà sarebbe I il punto dove si applica la risultante dei 2 pesi E, F ovvero il centro di gravità dei 3 pesi e del perimetro totale che trovarsi

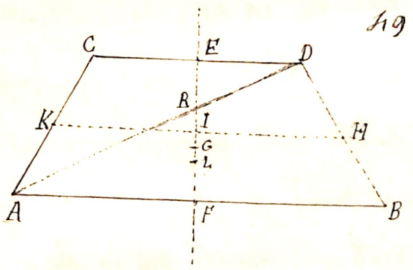
Fig 18



in DI. Similmente si dimostra che deve trovarsi su EG che bisega l'angolo E. Sarà dunque in G (loro intersezione) il ~~centro di gravità~~. Il centro di gravità del perimetro di un triangolo è dunque il centro di figura del circolo scritto al triangolo avente per vertici i punti di mezzo dei lati del triangolo dato.

In generale non si ha un'espressione così elegante del centro di gravità degli altri poligoni (rive del loro perimetro). Eccettuati quelli che sono simmetrici rispetto ad un punto, come tutti i poligoni regolari e i parallelogrammi che hanno nel centro stesso di figura, degli altri poligoni bisognerà comporre uno ad uno i pesi dei lati supposti applicati nei loro punti di mezzo. In quelli che sono simmetrici rispetto ad una linea l'operazione si semplifica. Sia per es. il trapezio ABCD simmetrico rispetto alla EF. Sia a la base AB, b la CD, h l'altezza; componendo i pesi delle CA, DB ricondotti nelle loro metà H, K, il loro centro si troverà evidentemente in I metà della EF.

fig 9

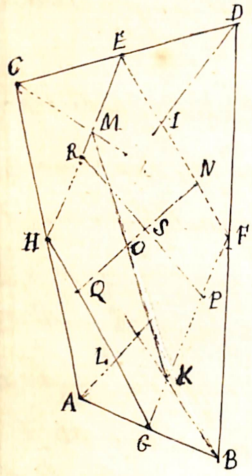


Di più siccome il centro totale deve trovarsi sulla EF, il centro delle CD AB si sarà anch'esso e dividerà EF in parti inversamente proporzionali a ED, AF. Tirata dunque AD, si avrà ER : RF :: ED : AF. Se quindi si prenda FL eguale a RE sarà L il centro delle CD, AB. Sia G il centro di gravità di tutto il perimetro, x la retta GF: sarà $IF = \frac{h}{2}$ $FL = h\frac{b}{a+b}$ $DB = CA = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2}$; onde il teorema dei momenti darà

$$x\left\{a+b+\sqrt{4h^2+(a-b)^2}\right\} = (a+b)\,h\frac{b}{a+b} + \frac{h}{2}\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$$

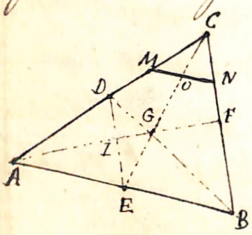
e di qui si ricava $x = \frac{h}{2}\,\frac{2b+\sqrt{4h^2+(a-b)^2}}{a+b+\sqrt{4h^2+(a-b)^2}} = h\,\frac{b+c}{p}$, dove il numero

momento x è un piano ortogonale a quello del trapezio, e passante per la base AB, c è il lato obliquo, p il perimetro totale



50 Sia il quadrilatero qualunque $ABCD$ del cui perimetro vogliasi trovare il centro di gravità Componendo insieme le CD, DB si ha per loro centro N, e così Q per centro delle AC, AB Similmente si trova R per centro delle CD CA, e P delle BA, BD. Siccome il centro dee trovarsi sulle NQ, RP si troverà sulla loro intersezione in S, È manifesto che il centro che trovasi sulla NQ, poichè in N è applicato il peso delle CD BD, e in Q quello delle rette CA, AB. La risultante totale sarà dunque sulla NQ Similmente si dimostra che dee trovarsi sulla RP

Venendo alla ricerca del centro di gravità delle superficie piane rettilinee incominceremo dal triangolo ABC. Se si divide per mezzo AB e si tira CE questa retta taglierà per mezzo in O tutti gli elementi MN in che si può scomporre la superficie per via di infinite rette parallele ad AB... Il triangolo è dunque simmetrico rispetto alla CE e il suo centro si troverà su questa linea. Similmente si proverà che dee trovarsi sulla BD che taglia AC per mezzo in D

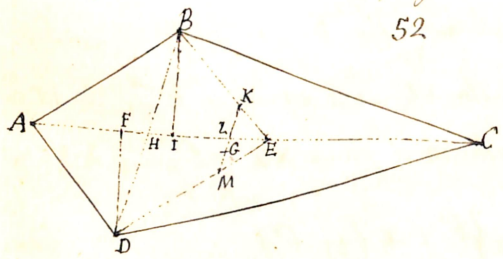


51. Sarà dunque in G loro intersezione. Se si tiri DE i 2 triangoli simili DGE CGB danno $GD : DE :: BG : CB$ or $DE = \frac{1}{2} CB$ sarà dunque $GD = \frac{1}{2} BG = \frac{1}{3} DB$

Similmente $GC = \frac{2}{3} CE$ Il centro di gravità di un area triangolare è dunque ai $\frac{2}{3}$ della retta che partendo da un vertice va al punto di mezzo della base opposta. È evidente che esso coincide col centro di gravità di 3 pesi eguali applicati ai 3 vertici del triangolo; poichè composti i pesi A e B il peso 2P si applica in E; nel comporre poi 2P con P applicato in C bisognerà che $GC : GE :: 2P : P :: 2 : 1$. Il che appunto si verifica nel punto G.

Siccome è indifferente scegliere 2 qualunque dei lati per bisecarli e tirare le rette ai vertici opposti così ottenere dalla loro intersezione il punto G; segue che trovato G colle BD, CE se si tira la retta AG essa dee dividere per mezzo la retta CB. E difatti si ha triang AGE = triang ADB, perchè sono metà del triangolo totale, Pi pii (Elementi) i 2 triangoli DGC, EGB hanno l'angolo in G comune; staranno fra di loro come i prodotti dei lati che lo comprendono cioè $DGC : EGB :: DG \times GC : EG \times GB :: DG \times 2GE : GE \times 2GD$

Dunque $DGC = EGB$, sarà ancora $DAG = AGE$, perchè $DAG = DGC$ $AGE = GEB$. I DAG, AGE avendo la base comune avranno altezze eguali, e le rette DI IE che fanno colle altezze angoli eguali saran pure eguali. Essendo DE parallela a CB sarà necessariamente $FC = FB$

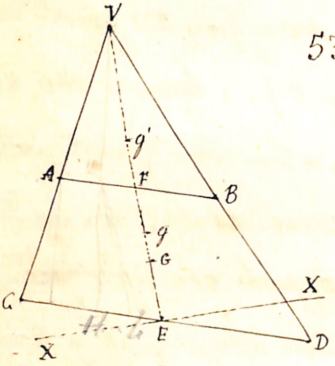


52

Col centro di gravità d'un triangolo si può trovare quello di un poligono qualunque. Sia il quadrilatero ABCD scomposto in 2 triangoli colla CA. Divisa per

mezzo AC in E, tratte DE, BE fatte $ME = \frac{1}{3} DE$, $KE = \frac{1}{3} BE$, MK saranno due centri parziali in cui si potranno immaginare applicate pesi proporzionali alle aree ADC ABC. Or la base essendo AC comune si avrà area ADC : area ABC :: DF : BL :: DH : HB :: LM : LN ; poiche BD è parallela ad MK Se dunque si prenda $MG = LK$ si avrà MG : GK :: area ABC : area ADC :: peso K : peso M, G è dunque il centro di gravità

Invece di considerare il quadrilatero come somma di 2 triangoli si sarebbe potuto considerare come differenza di 2 altri prolungando fino a che si incontrassero due lati opposti Siano nel trapezio a basi parallele ABCD prolungati i i 2 lati non paralleli AC, BD fino all'incontro in V. Noi potremo considerare il centro di gravità g del triangolo totale VCD come il punto ove si applica il peso P risultante dal peso p del triangolo VAB applicato in g', e dal peso del trapezio che è P−p applicato nel punto G che si deve trovare. Siccome g e g' sono sulla VE



53

che bisega le basi del trapezio ci sarà pure G. Sia h l'altezza del trapezio, a la base inferiore, b la superiore sarà $P : p :: a^2 : b^2$ ed anche $P : p :: P-p : p :: a^2 : b^2 : a^2 - b^2$. La retta VE sarà eguale a $h \frac{a}{a-b}$; la VF ad $h \frac{b}{a-b}$ Prendendo per primo dei momenti il piano XX ortogonale a VE sarà

$$\left\{ \frac{1}{3} h \frac{a}{a-b} \right\} a^2 = \left\{ h + \frac{1}{3} h \frac{b}{a-b} \right\} b^2 + x (a^2 - b^2)$$

onde $x = \frac{1}{3} h \frac{a^2 - 3ab^2 + 2b^3}{(a^2 - b^2)(a-b)} = \frac{h}{3} \frac{a\{a^2 - b^2\} - 2b^2\}a - b\}}{(a^2 - b^2)(a-b)} =$

$= \frac{h}{3} \frac{a\{a+b\} - 2b^2}{a^2 - b^2} = \frac{h}{3} \frac{a^2 - b^2 + ab - b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{h}{3} \frac{a+2b}{a+b}$

Mutando $a^2 - b^2 + ab - b^2$ in $(a+b)(a-b) + b(a-b)$ similmente si troverebbe $GF = \frac{h}{3} \frac{b+2a}{b+a}$.

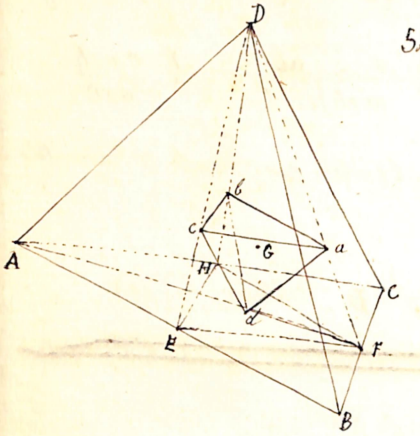
(Poisson 77, Venturoli 66-68)

LEZIONE XVIII.

Centro di gravità della superficie dei poliedri – di un tetraedro qualunque; di una piramide regolare – di un vaso prismatico – Centri di gravità dei volumi dei poliedri; di una piramide triangolare – di una piramide qualunque; di una superficie conica qualunque – di un tronco di piramide – di un tronco di cono – di un esaedro regolare.

Venendo ora alla determinazione dei centri di gravità delle superficie dei corpi più semplici, che sono terminati da facce piane, sia 1° a cercare quello della superficie del tetraedro qualunque ABCD. Si cerchino (Lez XVII) i centri dei triangoli formanti la superficie della piramide e siano questi a, b, c, d. Noi potremo considerare in questi 4 punti riuniti i pesi delle 4 facce corrispondenti, proporzionali alle aree di queste facce. Prima di tutto la piramide abcd formata dall'unire 2 a 2 i 4 centri parziali è simile alla piramide

ABCD; e che ciascuna faccia di quella ha per omologa la faccia di questa il cui centro di gravità è al vertice opposto alla 1ª nella piccola piramide; in una parola abcd è disposta inversamente ad ABCD Difatti uniti i mezzi H, E F della base, siccome $Db = \frac{2}{3} DH$, $Da = \frac{2}{3} DF$; $Dc = \frac{2}{3} DE$ saranno ab ac, cb, parallele a FH, FE, HE. Il triangolo abc sarà dunque simile ad EHF e ad ABC e posto in un piano a questo parallelo Similmente lo stesso si dimostra per gli altri lati. Se si vuol aver il rapporto dei lati omologhi, si ha dalla somiglianza di Dcb, DHE. $bc = \frac{2}{3} HE = \frac{1}{3} BC$; similmente $\frac{1}{3} AB = ab$, $ac = \frac{1}{3} AC$, $\frac{1}{3} DC = dc$. ecc



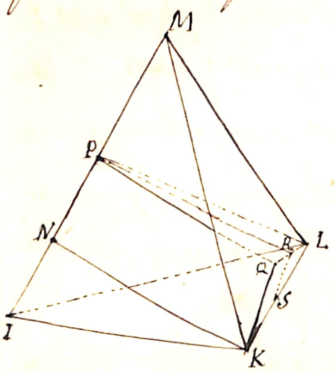
51

Le 4 forze applicate in a, b, c, d stando fra loro come le facce corrispondenti della piramide grande, staranno fra loro come le facce opposte della piramide piccola; vale a dire a : b : c : d :: bcd : acd : abd : abc.

Siamo condotti adunque d'questo altro problema; dati ai 4 vertici di una piramide triangolare 4 pesi proporzionali alle forze opposte, trovare il loro centro d'gravità. Sia IKLM questa piramide; se noi incominciamo a compiere i pesi K, L, noi dovremo dividere KL in parti inversamente proporzionali alle facce IML, IMK. o direttamente proporzionali alle facce adjacenti. Ora se sulla base comune dei 2 triangoli MIK MIL si abbassino le perpendicolari KN, LP noi avremo area MIK : area MIL :: NK : LP. La

questione è adunque ridotta a dividere KL in parti direttamente proporzionali a NK, LP. A tal fine da P si conduca PQ eguale e parallela a NK: sarà NQ eguale e parallela a NP; di più essendo NK perpendicolare a NP la figura NPKQ sarà un rettangolo, e l'angolo QPL misurerà l'angolo diedro delle 2 facce MIK, MIL; poichè QP LP contenute nei piani MIK MIL sono ortogonali a PI. Tirisi LQ: il triangolo LQK sarà rettangolo poichè LQ è nel piano LPQ ortogonale a MI, e QK è per costruzione parallela alla stessa MI; sarà dunque KQ ortogonale al piano LPQ e alla retta QL in esso contenuta.

55.

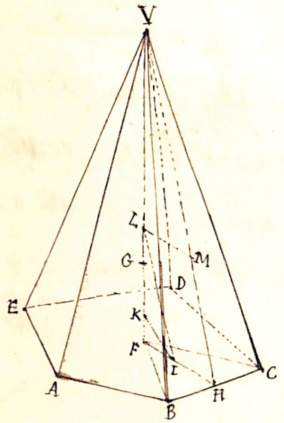


Bisechiamo ora con un piano l'angolo diedro LPQ la sua intersezione col piano LPQ sarà PR bisecante l'angolo QPL: e sarà RL:RQ::PL:PQ:: PL:NK. Ma il piano bisettore taglierà il piano QLK secondo la retta RS parallela a QK. Infatti il piano bisettore passa per NP, il piano QLK passa per QK parallela a NP. Ora l'intersezione di due piani passanti per 2 rette parallele essendo a queste rette parallela, segue che RS sarà parallela a QK e NP. Sarà dunque chiamando S il punto ove LK è tagliata dal piano bisettore QR:RL::KS:SL. Ma si ha già QR:RL::NK:PL dunque KS:SL::KN:LP. Concluderemo adunque che si soddisferà alla richiesta divisione bisecando in 2 parti eguali l'angolo diedro opposto a LK L'intersezione di LK col piano bisettore dà il punto S pel punto cercato.

in cui si può immaginare riuniti i pesi K e L.

Resta adunque ridotta la questione a trovare il centro dei pesi S, M, I. Il centro di gravità dei 4 pesi passerà pel piano di questi 3 punti, che sega l'angolo diedro MI. Ripetendo lo stesso ragionamento per un altro angolo diedro vedrà che il centro dei 4 pesi K, L, I, M è nell'intersezione dei 4 piani che segano i triangoli diedri della piramide; la quale intersezione regolarmente si dimostra esser il centro della sfera inscritta alla piramide.

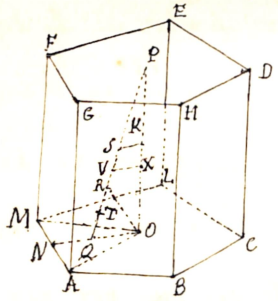
Si concluderà detto ciò, che il centro di gravità della superficie della piramide ABCD è il centro di figura della sfera inscritta alla piramide abcd formata dall'unione 2 a 2 dei centri di gravità delle 4 facce della ABCD.



56. La dimostrazione è molto più semplice nel caso di una piramide regolare VEC. Poichè il solido essendo simmetrico sull'asse VF il centro della sua superficie sarà su quest'asse. Il centro di gravità della base sarà evidentemente nel suo centro F di figura; quanto alle superficie rimanenti si osserva che tutti i centri di gravità dei singoli triangoli laterali, trovandosi ai $\frac{2}{3}$ dell'apotema a partire da S. Il centro loro comune sarà sul piano che passa per tutti questi centri parziali. Questo piano taglando l'asse VF ai $\frac{2}{3}$ a partire da V segna il centro della superficie laterale sarà L per cui $LF = \frac{1}{3} FV$

Immaginiamo in F, L raccolti i pesi della base e della superficie

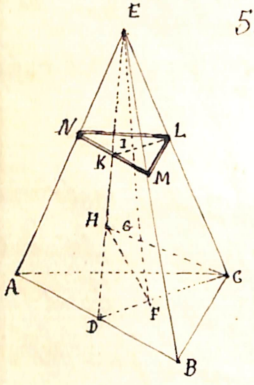
laterale; siccome queste stanno fra loro come $\triangle FBC : \triangle BVC :: HF : HV$, bisognerà dividere LF in parti inversamente proporzionali a FH, HV o (tirando per L, LI parallela a VH) a FI, LI. Ciò che si ottiene dividendo per mezzo l'angolo LIF colla IK e prendendo $LG = KE$, G sarà il centro domandato. Sia h l'altezza della piramide, a l'apotema della base, A l'apotema della piramide; sarà $GL = LF \frac{a}{a+A} = \frac{1}{3} h \frac{a}{a+A}$; epperò $GV = \frac{h}{3} \frac{3a+2A}{a+A}$; $GF = \frac{h}{3} \frac{A}{a+A}$; epperò $\frac{GV}{GF} = \frac{3a+2A}{A}$. Cioè il centro di gravità di una piramide qualunque regolare divide l'asse in 2 parti che stanno fra di loro come il doppio dell'apotema della piramide, più il triplo dell'apotema della base, sta al primo apotema.



57 Sia il vaso prismatico regolare $MADE$ sopra-posto e vogliasi trovare il centro di gravità della totale superficie. È evidente il centro del fondo essere in O centro di figura del fondo stesso, il centro delle pareti laterali essere in R metà dell'asse OP. Bisognerà dividere dunque KO in parti inversamente proporzionali alla superficie laterale ed alla base, o ciò che è lo stesso all'altezza PO e alla metà OQ dell'apotema. Tirasi PQ e bisechisi l'angolo QOP: $QR : RP :: PO : QO$ e dividendo per mezzo PQ colla KS parallela ad OQ e dividendo pure per mezzo RQ in T sarà $TQ : TS :: QO : PO$. Tirisi TQ in SV, e tirasi VX parallela a QO sarà $KX : XO :: SV : VQ :: TQ : TS :: QO : PO$; X è dunque il centro dimandato.

Noi abbiamo $KX = KO \frac{QO}{QO+PO}$; e se sia h l'altezza, a l'apotema della base, $KX = \frac{1}{2}h \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a+h} = \frac{1}{2}h \frac{a}{a+2h}$; onde si ricava $OX = \frac{1}{2}h \frac{2h}{a+2h}$ ossia $OX = h \frac{h}{a+2h}$; $PX = h \frac{a+h}{a+2h}$; onde $\frac{OX}{PX} = \frac{h}{a+h}$. Cioè il centro di gravità del cuneo divide l'asse del prisma in 2 parti che stanno fra di loro come l'altezza del prisma, a quest'altezza più l'apotema della base.

In generale si troverà poi il centro di gravità della superficie di qualunque poliedro, componendo successivamente i centri parziali delle facce



58. – Centri di gravità dei volumi dei poliedri.

Sia la piramide ABCE, F il centro di gravità della base, tirata FE e segata la piramide con un piano parallelo alla base in NML dico che EF passa pel centro di gravità del triangolo NML. Difatti tirate a D, mezzo di AB le DC, DE sarà NK = KM, perchè AD = DB sarà egualmente KL parallela a DC ed allora nel piano DCE si avrà dai triangoli simili DCE, EKL, DFE KIE, DF : KI :: DC : KL sarà perciò $KI = \frac{1}{3}KL$. Dunque 1 è centro di gravità del triangolo NLM. Si dimostra egualmente che EF passa pel centro di gravità di tutte le sezioni della piramide parallela alla base.

Noi potremmo ora scomporre il volume della piramide in tante lamine che per la loro sottigliezza indefinita, si possino riguardare come prismi d'altezza infinitamente piccola rispetto alla base, con una serie di piani

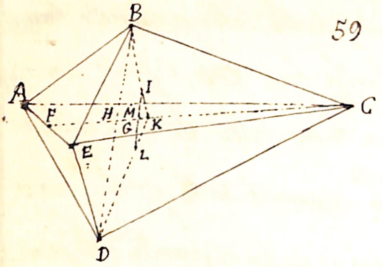
paralleli ad ABC, i centri parziali di tutti questi segmenti troverebbonsi tutti sulla EF, dunque altresì il centro di gravità della piramide, trovarsi sulla EF. Se ora sia H il centro di gravità della base EAB, è facile dimostrare come pure anzi che il centro di gravità cercato si trova nella HC; le rette HC FE debbono dunque incontrarsi e si incontrano veramente in G, poichè ambe son contenute nel piano EDC. Dunque G sarà il centro di gravità della piramide.

Se si tiri HF i due triangoli DHF DEC saranno simili epperciò sarà HF parallela ad EC. Onde risulta che i triangoli HGF, EGC saranno simili anch'essi, e si avrà EG : GF :: EC : HF. Ma EC = 3HF, dunque EG = 3GF GF = $\frac{1}{3}$ EG = $\frac{1}{4}$ EF. Il centro di gravità di una piramide triangolare, è dunque al 4° della retta condotta dal centro di gravità di una faccia al vertice opposto.

È facile vedere che G sarebbe ancora il centro di gravità di 4 pesi eguali applicati ai 4 vertici della piramide. Poichè lo sforzo dei 3 pesi eguali A, B, C, si compensa in un peso triplo applicato in F, come si è dimostrato nella (Lez. XVII). Il centro dei pesi F, E di cui il 1° è triplo dell'altro si otterrà in G, quando GF sia $\frac{1}{3}$ EG. Così è appurata la posizione del centro di gravità della piramide.

Conoscendo il centro di gravità di una piramide triangolare è facile dedurre il centro di un poliedro qualunque. Sia per es l'eptaedro irregolare ABCD; dopo averlo scomposto in 2 piramidi ABCE, AECD divido per mezzo AE in F, tiro CF e ne prendo il 3° in K. Condotte KB, KD, e

e prese a partire da K le loro quarte parti, saranno I, L i centri parziali in cui posso immaginare unite per proporzionali a volumi delle 2 piramidi. I quali volumi, essendo la base comune stan fra di loro come le altezze rispettive, o (come si può facilmente provare) come le rette BH, HD o ancora come le IM, LM.

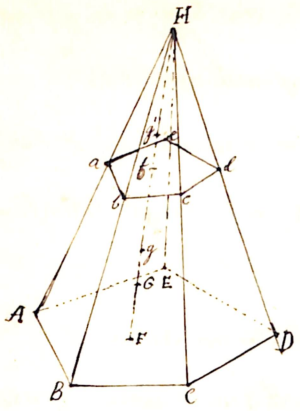


59

Presa adunque IM e portatala in LG, sarà G il centro cercato. Uniti due i centri di gravità con una retta si segni il punto ove essa incontra il piano della base comune e poi si inverta questa retta.

In una piramide a base piana qualunque il centro di gravità si trova ancora sulla retta che unisce il vertice al centro di gravità della base, ed è facile provarlo come si è fatto per la piramide triangolare. Se poi si immagina la base scomposta in tanti triangoli, e per ciascuna delle diagonali che scompongon la base si conduca un piano al vertice, la data piramide verrà scomposta in tante piramidi triangolari, i cui centri parziali si troveranno tutti su un piano distante dalla base di $\frac{1}{4}$ dell'altezza della piramide, onde sopra di esso il centro totale di gravità dovrà ancora trovarsi in questo piano. Di qui è facile venir a concludere che il centro di gravità di una piramide qualunque a base piana, è al $\frac{1}{4}$ della retta condotta dal centro di gravità della base al vertice.

Per ultimo esempio intraprenderemo la ricerca del centro di gravità del



60 Tronco di piramide qualunque a basi parallele ABCDE abcde. Sia h la lunghezza Ff che unisce i centri di gravità delle 2 basi parallele, e che prolungata va nel vertice H dove concorrono tutti gli spigoli, p^2 l'area della base inferiore, q^2 quella della base superiore. Noi avremo, per Habcde: : più HABCDE : tronco ABCDE abcde :: $q^3 : p^3 : p^3 - q^3$

Onde immaginiamo che g sia il punto d'applicazione della risultante dei pesi q^3 applicato in g', e $p^3 - q^3$ applicato in G. Prendendo per primo dei momenti una piano che sia ortogonale in F alla FH ed osservando che $Fg = \frac{1}{h} FH = \frac{h}{h} \frac{p}{p-q}$: $Fg' = h + \frac{h}{h} \frac{q}{p-q}$; si avrà chiamando x la FG.

$$x(p^3-q^3) + \left(h + \frac{h}{h}\frac{q}{p-q}\right) q^3 = \frac{h}{h}\frac{p}{p-q} p^3$$

$$x = \frac{h}{h} \frac{(p^4 - q^4) - hq^3(p-q)}{(p^3-q^3)(p-q)} = \frac{h}{h} \frac{(p^3 + p^2q + pq^2 - 3q^3)}{(p^3-q^3)} \text{ ossia}$$

$$x = \frac{h}{h} \cdot \frac{p(p^2+pq+q^2)}{(p-q)(p^2+pq+q^2)} - \frac{h}{h} \times \frac{3q^3}{p^3-q^3} = \frac{h}{h}\frac{p}{p-q} - \frac{3}{h} h \frac{q^3}{p^3-q^3}$$

Molti dei risultati in questa lezione ottenuti si proporrà generalizzare Così noi abbiamo ottenuto il centro di gravità della superficie totale di una piramide regolare qualunque, di un vaso prismatico regolare qualunque, del volume di una piramide qualsivoglia, e di qualsiasi tronco di piramide:

ora è ~~risultato~~ evidente che il N° dei lati potendo moltiplicarsi all'infinito potremo scrivere senza più gli enunciati dei seguenti teoremi.

1°. Il centro di gravità della superficie totale di un cono divide l'altezza in 2 parti che stanno fra di loro come il triplo lato, più il raggio della base triplicato sta al raggio stesso.

2°. Il centro di gravità della superficie convessa di un cono è ai $\frac{2}{3}$ dell'altezza a partire dal vertice (si intende di coni retti), nel caso in cui il cono non sia retto è ai $\frac{2}{3}$ della retta che dal vertice conduce al centro di gravità del perimetro della base.

3° Il centro di gravità di un vaso cilindrico regolare scoperto, divide l'asse del cilindro in 2 parti che stanno fra loro come l'asse, sta all'asse più l'apotema della base che è il suo raggio.

4° Il centro di gravità di un cono (volume) a base piana di figura qualunque è al $\frac{1}{4}$° della retta che dal centro di gravità della base va al vertice.

5°. Il centro di gravità di un tronco di cono a basi qualunque è sulla retta che unisce i centri di gravità delle 2 basi alla distanza $\frac{h}{n}\frac{p}{p-q} - \frac{2h}{n}\frac{q^3}{p^2-q^2}$ dal centro della base superiore; essendo h la distanza dei centri delle 2 basi p. q le linee omologhe di queste 2 basi, superiore ed inferiore.

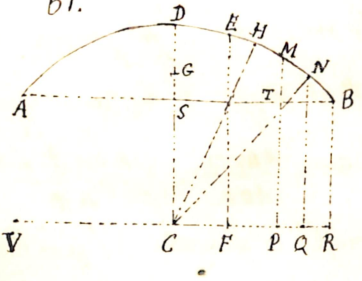
(Venturoli 69 – 71)

LEZIONE XIX.

Centri di gravità delle figure terminate da archi di circolo o da superficie sferiche – Centro di gravità della lunghezza di un arco di circolo – Dell'area di un settore circolare – Di un segmento di circolo ad una base o a 2 basi parallele o non. – Della superficie di una calotta sferica – Del volume di un settore sferico – Di un segmento sferico a una base e a 2 basi sia parallele che non.

COLLA semplice Geometria è assai possibile determinare i centri di gravità delle figure terminate da archi di circolo o da superficie sferiche

61.

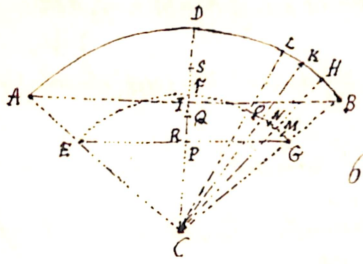


Sia a trovare il centro di gravità dell'arco di circolo ADB. Tiri AB e il raggio CD ad esso perpendicolare. L'arco essendo affatto simmetrico rispetto a CD, segue che su essa sarà il punto cercato. Poniamo che sia G e prendiamo per punto dei momenti VR ortogonale a DC. Se si scomponga l'arco in un infinità di porzioni MB infinitamente piccole in modo che possano considerarsi come rette linee, potremo intendere raccolto nel suo mezzo N tutto il peso della porzione MB e così delle altre. Il momento di tutto l'arco

essendo eguale alla somma dei momenti delle sue porzioni si avrà $ADB \times GC = \Sigma(MB \times NQ)$; intendendo con questo simbolo la somma dei momenti di tutte le porzioni d'arco. Se si tiri CN i 2 triangoli MTB, CNQ essendo simili poiche hanno i lati perpendicolari, si avrà $MB : NC :: TB : NQ$ onde $MB \times NQ = NC \times TB = NC \times PR$ Tale sarà il momento dell'arco MB. Similmente quello dell'arco ME sarà $HC \times FP = NC \times FB$, cioè il momento d'ciascun archetto è eguale alla sua projezione su VR moltiplicata pel raggio Dunque a $\Sigma(MB \times NQ)$ potremo sostituire $\Sigma(NC \times PR)$, e siccome NC è fattor in tutti i termini o momenti parziali; avremo $NC \times \Sigma PR$. Ora è chiaro che ΣPR è la somma delle projezioni degli archi successivi su VR è eguale alla corda AB; dunque $\Sigma(MB \times NQ) = NC \times AB = DC \times AB$. Dunque $GC \times ADB = CD \times AB$: ossia in forma di proporzione $ADB : AB :: CD : CG$: cioè la distanza del centro di gravità dal centro del cerchio è 4° proporzionale dietro l'arco, la corda, e il raggio. Sia R il raggio, φ la lunghezza dell'arco omologo ad ADB nel raggio 1 sarà $GC = \frac{AB \times CD}{ADB} = \frac{2R \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \times R}{R\varphi} = \frac{2R \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}}{\varphi}$; sia $\varphi = \pi$ si avrà pel centro di gravità del semicerchio $\frac{2R}{\pi}$ e per quello del quadrante $\frac{2R}{\frac{\pi}{2}\sqrt{2}} = R\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

Avendo il centro di gravità dell'arco di ~~cir~~ circolo è facile trovare quello dell'arco del settore circolare: Difatti sia ADBC questo settore prendasi sull'arco ADC delle porzioni HB, HK LK— eguali ed infinitamente piccole; noi potremo considerare le aree BCH. HCK come altrettanti triangoli

isoscele, i cui centri parziali di gravità sono al 5° del raggio che li divide per metà a partire dalla base, e distante $\frac{2}{3}$ del raggio dal centro. Siccome in questi centri parziali M, N, O... infinitamente vicini, non porta loro a egual distanza sull'arco GFE descritto con raggio $CG = \frac{2}{3} CB$, poiché concentrare i pesi dei singoli triangoletti, ne verrà che potremo concentrare il peso di tutto il settore sull'arco GE gravitando lo uniformemente. Cade dunque il centro di gravità del settore coincide con quello dell'arco GFE e dee CQ chiamando R il raggio CG, e la lunghezza degli archi simili a ADB, GFE nel raggio 1. avremo $QC = \frac{4}{3} \frac{R \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}}{\varphi}$, poiché qui il raggio dell'arco GFE $= \frac{2}{3} R$. Se il settore è un quadrante si ha $QC = \frac{4}{3} \frac{R}{\varphi\sqrt{2}} = \frac{4}{3} \frac{R}{\frac{\pi}{2}\sqrt{2}} = \frac{4R\sqrt{2}}{3\pi}$; e se è un semicircolo $\frac{4}{3} \frac{R}{\pi} = R \frac{4}{3\pi}$.



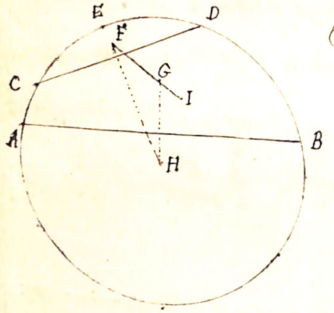
62.

Avendo il centro di gravità del settore CADB è facile aver quello del segmento IBDA, considerandolo come differenza tra il settore ed il triangolo ABC. Sia S il centro di gravità del segmento, R quello del triangolo; il teorema dei momenti darà $CS = $ area del segmento $= CQ \times$ area del settore $-$ CR area del triangolo. Ora si ha l'area del settore eguale a $\frac{1}{2} ADB \times CB$; $CR = \frac{2}{3} \frac{AB \times CD}{ADB}$. Sarà dunque momento del settore $= \frac{1}{3} AB \times \overline{CD}^2$. Il momento del triangolo sarà $CR \times \frac{1}{2} AB \times CI$: or $CR = \frac{2}{3} CI$: Dunque il momento del triangolo potrà esprimersi per $\frac{1}{3} AB \times \overline{CI}^2$. Facendo queste

sostituzioni si avrà

$$CS \times \text{area del segmento} = \frac{1}{3} AB\,(\overline{CD}^2 - \overline{CI}^2) = \frac{1}{3} AB \times \overline{BI}^2 = \frac{1}{12} AB^3.$$

Dunque $CS = \frac{1}{12} \frac{AB^3}{\text{area del segmento}}$. Il che si enuncia dicendo, che la distanza dal centro del circolo del centro di gravità del segmento è il dodicesimo del cubo della corda divisa per l'area del segmento. Analiticamente essendo l'area del segmento eguale ad $\frac{a^2}{2}(\varphi - \operatorname{sen}\varphi)$, ed essendo $AB = 2a \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}$, tal distanza sarà $\frac{2a}{3} \frac{\operatorname{sen}^3\frac{1}{2}\varphi}{\varphi - \operatorname{sen}\varphi}$. Pel semicircolo $\frac{4a}{3\pi}$



63

Sia ora il segmento a basi non parallele ACDB. Per trovarne il centro di gravità consideriamolo come differenza dei 2 segmenti ad esse basi CED, AEB e siano F G i centri di gravità due segmenti tirando HF, HG. esse saranno perpendicolari alle corde CD AB: onde l'angolo FHG sarà eguale all'angolo compreso fra le 2 corde CD, AB, il quale ha evidentemente per misura $\frac{DB - AC}{2}$. Essendo noti DB AC nel triangolo FGH noi conosceremo i lati FH GH e l'angolo in H; sarà facile dedurne FG; prendendo allora I tale che GI : FI :: area CED : area CEB; I sarà evidentemente centro di gravità del segmento ACDB. Nel caso delle 2 basi parallele si ha $FG = FH - GH$; in qualunque caso poi si può determinare I analiticamente ripetendo

ad un piano di momenti

Per venire alle superficie sferiche, debbasi trovare il centro di gravità della calotta sferica rappresentata in elevazione dal segmento ABDE. Se per un diametro ortogonale al raggio CE ortogonale al cerchio base AED si fanno passare a eguali distanze infinitesimi piani $a\alpha$, βb, γc, ... vicinissimi fra di loro, le parti O, O', O''... della saetta ha loro intercette saranno eguali; e siccome le zone infinitamente sottili in cui si parte la calotta possono considerarsi come porzioni di circoli, i loro centri di gravità saranno nei centri di queste zone. Siccome poi ogni zona sferica ha per misura della sua superficie l'altezza per la periferia del circolo massimo, le zone $a\alpha\beta b$, $\beta b\gamma c$ ... avendo eguali altezze saranno eguali in area e peso. Onde se noi concentriamo in O, O' O''... i pesi delle singole zone questi pesi essendo eguali, O, O', O''... equidistanti, segue che il peso della calotta concentrato nella saetta BE la grava uniformemente in tutti i punti. Epperò il centro di gravità della calotta sferica sarà nel centro di gravità della saetta BE, cioè nel suo punto di mezzo G. (Lez XVII.) Lo stesso è per una zona qualunque

Avendo il centro della calotta sferica si determina agevolmente quello del volume del settore sferico ACDB. Poichè se si scompone la

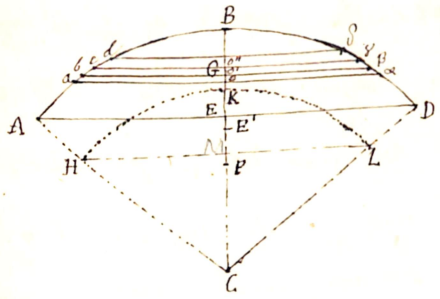


Fig. 64

superficie della calotta corrispondente in parti eguali e infinitamente piccole, il settore si dividerà in una infinità di piramidi sferiche eguali ed infinitesime, le quali avranno loro centro di gravità ai $\frac{3}{4}$ del raggio a partir dal centro. Se si immagini dunque una calotta descritta dal centro C con raggio $= \frac{3}{4} CD$, i centri si troveranno tutti uniformemente distribuiti su questa calotta di eguale ampiezza della AED e avente lo stesso asse. Onde il peso di tutto il settore gravando uniformemente la calotta HKL, il suo centro sarà alla metà della saetta KM, onde sarà $CE = \frac{3}{4} CG$. Sia x la saetta, r il raggio sarà $CG = r - \frac{1}{2} x$ $CE = \frac{3}{4} r - \frac{3}{8} x$. Per l'emisfero il centro di gravità della superficie curva giacendo nella metà del raggio ortogonale alla base, il centro del volume sarà a $\frac{3}{8} r$ di distanza dal centro.

Considerando il segmento ADB come differenza del settore CABD e del cono ACD se ne trova il centro. Sia a il raggio, x la saetta BE: noi avremo dinominando N la distanza del centro cercato da C, F' essendo il centro del cono ACD

$N \times$ vol del Segmento $= CE' \times$ vol del settore $- CE \times$ vol del cono;

Ora si ha. Vol del settore = calotta ABD $\times \frac{1}{3} a = \frac{1}{3} a \times 2\pi a x = \frac{2\pi}{3} a^2 x$;

$CE' = \frac{3}{4} a - \frac{3}{8} x$; $CF = \frac{3}{4} CE = \frac{3}{4} a - \frac{3}{4} x$; vol del cono $= \frac{1}{3} CE \times \pi \overline{DE}^2$

$= \frac{\pi}{3} (a-x)(2ax - x^2)$: onde Vol del segmento $= \frac{2\pi}{3} a^2 x - \frac{\pi}{3}(a-x)(2ax-x^2)$:

operando queste sostituzioni e riducendo si ottiene $N = \frac{3}{4} \frac{(2a-x)^2}{3a-x}$, la distanza del centro dal vertice sarà $a - N = \frac{8a - 3x}{12a - 4x} x$. Avendo il

centro di gravità del segmento ad una sol base, e' facile dedurre quello di un segmento a 2 basi parallele e non parallele.

LEZIONE XX.

Formole per trovare le coordinate del centro di gravità di figura qualunque, e di densità uniforme e variabile – Formole per trovare il centro di gravità di un arco di curva qualunque. – Applicazione al circolo ed alla cicloide – Formole per avere il centro di gravità di qualunque area piana terminata da rette e da curve Applicazione alla sezione del cono.

I MEZZI geometrici, dei quali nelle passate lezioni abbiamo fatto uso per la determinazione dei centri di gravità, semplici ed adattabili a tutti i casi particolari che abbiamo trattati diventano di impossibile, o almeno di difficile applicazione quando si tratti di figure più complicate di quelle già discusse. V'ha necessità dunque di trovare degli altri metodi applicabili a qualunque caso particolare, e generali più dei precedenti.

Noi abbiamo trovato (Lez XVI) che le coordinate del centro di gravità di un sistema invariabile di pesi p_1 p_2 ... i cui centri particolari sono nei punti x_1, y_1, z_1; $x_2 y_2 z_2$; .... sono.

$$x_a = \frac{\Sigma p x}{\Sigma p} \quad ; \qquad y_a = \frac{\Sigma p y}{\Sigma p} \quad ; \qquad z_a = \frac{\Sigma p z}{\Sigma p}$$

Ciò pel caso di un sistema discontinuo; ma non è meno vero, che con qualche modificazione non si possano queste formole adottare ad un sistema continuo. Sia adunque un corpo di figura qualunque e densità qualunque, variabile o no; se noi immaginiamo questo corpo diviso da 3 serie di piani paralleli ai piani delle coordinate ed infinitamente ho loro vicini, in un infinità di cubi; noi potremo ben supporre che per lo stesso cubo la densità sia uniforme, perchè possiamo stringere fin da confonderci i limiti della sua estensione. Siano x, y, z le coordinate di questo cubo (che possiamo rappresentarlo come un punto nell'ipotesi che facciamo); δ la sua densità che supponiamo costante, dv il suo volume: i suoi 3 momenti rispetto ai 3 assi saranno $\delta dv \times x$; $\delta dv \times y$; $\delta dv \times z$; poichè δdv esprime il peso (volume per la densità). Sarà dunque chiamando P il peso totale, $x_u\ y_u\ z_u$ le coordinate del centro di gravità.

$$x_u = \frac{\Sigma \delta dv x}{P}, \quad y_u = \frac{\Sigma \delta dv y}{P}, \quad z_u = \frac{\Sigma \delta dv z}{P}$$

Oppure se vuoli sostituiremo dp a δdv e sarà dp il differenziale del peso.

$$x_u = \frac{\Sigma x dp}{P}, \quad y_u = \frac{\Sigma y dp}{P}, \quad z_u = \frac{\Sigma z dp}{P}$$

La somma degli elementi infinitesimi della forma $x dp$, $y dp$ $z dp$ dove p è funzione di x, y, z, non è altro che il loro integrale; onde si potrà scrivere $x_u = \frac{\int x dp}{P}$, $y_u = \frac{\int y dp}{P}$ $z_u = \frac{\int z dp}{P}$ (1)

I quali integrali dobbiamo estendere a limiti tali da poter comprendere tutta l'estensione del corpo. Nel caso in cui il corpo sia omogeneo, è $dp = \delta dV$ $p = \delta V$ onde δ sparisce nelle formole (1) e si ha

$$x_u = \frac{\int x\,dV}{V}, \quad y_u = \frac{\int y\,dV}{V} \quad z_u = \frac{\int z\,dV}{V} \qquad (2)$$

Tanto poi nelle (1) che nelle (2) è lecito a p sostituire la massa M, togliendo g fattor comune, poichè $p = Mg$ $dp = g\,dM$. Le formole (1) sono generalissime e servono a trovare il centro di gravità di qualunque sistema o corpo. Esse prendono poi diverso aspetto, secondochè il corpo considerato si ritiene concentrato in una linea o in una superficie, oppure esteso in un volume.

Sia dapprima a cercare il centro di gravità di una curva qualunque nello spazio. Supponendola gravata uniformemente di pesi, ogni elemento della lunghezza sarà di peso proporzionale alla sua estensione. Sia λ il peso dell'unità di lunghezza, il peso dell'arco ds sarà λds onde $dp = \lambda ds$; similmente sarà $p = \lambda s$; onde togliendo il fattore comune nelle (1), avremo la posizione del centro della curva.

$$x_u = \frac{\int x\,ds}{s}, \quad y_u = \frac{\int y\,ds}{s}; \quad z_u = \frac{\int z\,ds}{s}.$$

I quali integrali si possono eseguire presa qualunque delle variabili x, y, z, s per indipendente, con alcuno almeno dei mezzi suggeriti dall'analisi

infinitesimale. Nel caso in cui la curva sia piana e riferita a 2 assi posti nel suo piano le formole (3) si riducono a 2

$$x_u = \frac{\int x\,ds}{S} \quad , \quad y_u = \frac{\int y\,ds}{S}.$$

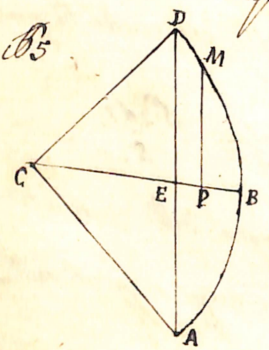
E quando la curva di cui si tratta sia simmetrica intorno all'asse x il centro di gravità si troverà su quest'asse ed y_u diventerà zero; in questo caso si tien conto della sola formola $x_u = \frac{\int x\,ds}{S}$

Sia per 1ª applicazione a cercare il centro di gravità dell'arco circolare ABD. Preso il raggio di mezzo CB per asse delle x, e il centro per origine, si chiami φ la lunghezza dell'arco BD nel raggio 1 e facciasi CB = 1

Preso un punto M qualunque si abbassi MP; noi avremo CP = I = a cos θ, se facciasi $\frac{BM}{a} = \theta = \frac{S}{a}$ Sarà dunque

$$x_u = \frac{\int x\,ds}{S} = \frac{a\int \cos\theta\,ds}{S} = \frac{a^2 \int \cos\theta\,d\theta}{S} = \frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{S}.$$ Ma

prendendolo fra i limiti φ e $-\varphi$ $x_\varphi = \frac{2a^2 \operatorname{sen}\varphi}{2a\varphi}$, Or $2a\operatorname{sen}\varphi = DA$, $2a\varphi = ABD$. dunque $x = \frac{1 \times DA}{ABD}$ come appunto erasi trovato col



185

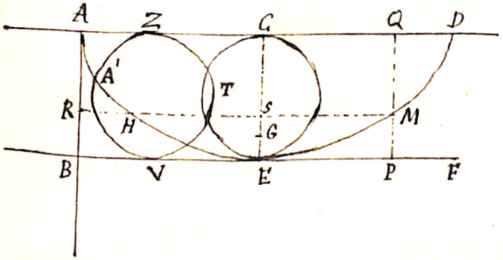
metodo geometrico, traduzione volgare del metodo integrale. Qui non è bisogno di y_u perchè è noto, il centro di gravità trovarsi nella CB.

Sia per 2° esempio la cicloide AED

generata dal punto A trasportato nel circolo AYTZ nel girare senza scorrimento sulla AD. L'eq. di questa curva riferita agli assi AD AB è composta di 2 che legano x ed y per l'intermediario φ

$$x = a(\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \qquad y = a(1 - \cos\varphi)$$

dove φ è l'arco di cui A si è rivalzato nel moto come ZA', punto A' della cicloide. Noi porremo l'origine delle coordinate nel vertice E, e prenderemo EF per l'asse x', EC per l'asse y'. Noi avremo



$x = x' + AC = x' + a\pi$, se a sia il raggio del circolo generatore; $y = y' + OP = 2a - y'$. Fatte queste sostituzioni nelle eq. superiferite si avrà:

$$x' = a(\varphi - \pi - \operatorname{sen}\varphi) \qquad y' = a(1 + \cos\varphi)$$

Differenziando $dx' = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi \qquad dy' = -a\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi$

$$ds = \sqrt{dx'^2 + dy'^2} = a\,d\varphi\sqrt{(1-\cos\varphi)^2 + \operatorname{sen}^2\varphi} = a\,d\varphi\sqrt{2 - 2\cos\varphi}.$$

$$ds = 2a\,d\varphi \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\varphi \qquad s = -4a\cos\tfrac{1}{2}\varphi + C$$

Qui per $\varphi = \pi$ dovendo esser $s = 0$ perchè gli archi si contano a partire da E sarà $s = -4a\cos\frac{1}{2}\varphi$. Or si ha

$y' = a(1 + \cos\varphi) = 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi \times a$; sarà dunque $\cos\frac{1}{2}\varphi = -\frac{s}{4a}$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{s^2}{16a^2} \qquad y' = \frac{2a\,s^2}{16a^2} = \frac{s^2}{8a}; \qquad s^2 = 8ay'$$

Tale è l'equazione della cicloide espressa per la lunghezza ME e per l'ordinata MP. Se vogliamo cercare il centro di gravità di un arco di cicloide HEM simmetrico intorno all'asse EC basterà calcolarne l'ordinata poichè sappiamo che l'ascissa sarà zero. Noi avremo dunque.

$$y_u = \frac{\int y\,ds}{s} = \frac{\int s^2 ds}{8as} = \frac{1}{8as}\cdot\frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{8as}\,\frac{1}{3}\,s\cdot 8ay' = \frac{1}{3}y'$$

Cioè il centro di gravità a partire dal vertice E è a $\frac{1}{3}$ della saetta ES, in G. Nel caso in cui debbasi trovare il centro di gravità del solo arco EM bisogna ancora calcolare l'ascissa $x_u = \frac{\int x'ds}{s}$. Ora per fare l'integrale $\int x'ds$ si integri per parti; noi avremo

$\int x'ds = x's - \int s\,dx'$ Ora $dx' = \sqrt{ds^2 - dy^2} = ds\sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}}$:

Ma dalla $y' = \frac{s^2}{80}$ si ricava $\frac{dy'}{ds} = \frac{1}{4a}$; dunque

$dx' = ds\sqrt{1 - \frac{s^2}{16a^2}} = \frac{ds}{4a}\sqrt{16a^2 - s^2}$; onde $\int s\,dx' = \int \frac{s\,ds}{4a}\sqrt{16a^2 - s^2}$

$= \frac{1}{4a}\int s\,ds\sqrt{16a^2 - s^2}$: facendo $s^2 = t$ sarà $s\,ds = \frac{1}{2}dt$ e

l'integrale nostro si ridurrà a $\frac{1}{8a}\int dt\sqrt{16a^2 - t}$ Integrale è facilmente

eseguibile e riuscirà a $-\frac{1}{8a}\cdot\frac{2}{3}(16a^2 - t)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{12a}(16a^2 - s^2)^{\frac{3}{2}}$

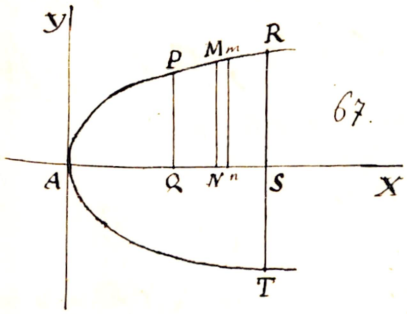
Avremo finalmente $\int x'ds = x's + \frac{1}{12a}(16a^2 - s^2)^{\frac{3}{2}}$ e finalmente

$x_u = x' + \frac{1}{12as}(16a^2 - s^2)^{\frac{3}{2}}$. L'integrale $\int x'ds$ dovendo esser preso fra i limiti 0 e x' si avrà

$$\int_0^{x'} x'ds = x's + \frac{1}{12a}\left(16a^2 - s^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12a}\left(16a^2\right)^{\frac{3}{2}} = x's + \frac{1}{12a}\left(16a^2 - s^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{3}a^2$$

e finalmente il valore di $x_u = x' - \frac{16}{6}\cdot\frac{a^2}{s} + \frac{1}{12a}\left(16a^2 - s^2\right)^{\frac{3}{2}}$ e poichè $s^2 = 8ay$ $x_u = x' - \frac{8a\sqrt{a}}{3\sqrt{2y}} + \frac{\sqrt{a}}{6}\left(2a - y\right)^{\frac{3}{2}}$ Per la semicicloide ED si ha $y' = 2a$ $x' = \pi a$ onde $y_1 = \frac{2}{3}a$ ed $x_u = a\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$

Sia ora a cercare il centro di gravità del segmento RPSQ di area piana compresa fra le 2 ordinate limiti PQ RS, l'asse x e la curva RP



67.

Se scomponiamo l'area in tanti elementi come MmnN tali che si possano rigorosamente confondere con un rettangolo d'egual base e di egual altezza, la somma dei momenti di questi elementi sarebbe eguale all'area totale per l'ancisa ordinata del centro di gravità. Ora il centro di gravità del rettangolo Nn nM è nel suo centro di figura perciò le sue ordinate saranno $x + \frac{1}{2}dx$; $\frac{1}{2}y$ Siccome però dx è infinitamente piccolo rispetto ad x, stabiliremo che le coordinate del centro di gravità dell'elemento siano x, $\frac{1}{2}y$ Aggiungiamo che il peso suo è proporzionale all'area (che si suppone uniformemente gravata) e che l'area sua è MN × Nn = ydx. I momenti dell'elemento rispetto agli assi x ed y saranno dunque $xydx$ $\frac{1}{2}y^2dx$ epperò le coordinate del centro di gravità del segmento PQSR saranno.

$x_u = \dfrac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}$ $\qquad y = \dfrac{1}{2}\dfrac{\int y^2 dx}{\int y\,dx}$. Dove gli integrali si prendono fra i limiti $x = AS$ $x = AQ$. Nel caso in cui la curva sia simmetrica rispetto all'asse x basterebbe la prima delle due, poiché y sarebbe zero

Sia la curva una parabola $y^2 = 2px$; sarà $x = \dfrac{y^2}{2p}$; quindi $\int xy^2 dx = \dfrac{1}{2p}\int y^3 dx = \dfrac{1}{2p}\cdot\dfrac{1}{4}x^4 = \dfrac{1}{8p}(2px)^2 = \dfrac{1}{2}x\cdot 2px = \dfrac{1}{2}xy^2$. e come $2y\,dy = 2p\,dx$ sarà $dx = dy\,\dfrac{y}{p}$; onde $\int y^2 dx = 2p\int x\,dx = 2p\cdot\dfrac{1}{2}x^2 = \dfrac{1}{2}x\cdot 2px = \dfrac{1}{2}xy^2$. finalmente $\int y\,dx = \dfrac{1}{p}\int y^2 dy = \dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{1}{3}y^3 = \dfrac{y^2}{2p}\cdot\dfrac{2}{3}y = \dfrac{2}{3}xy$. Prendendoli fra i limiti a e b si ha.

$\int_a^b xy\,dx = \dfrac{2}{3}(b^2\beta - a^2\alpha)$; $\int_a^b y^2 dx = \dfrac{1}{2}(b\beta^2 - a\alpha^2)$;

$\int_a^b y\,dx = \dfrac{2}{3}(b\beta - a\alpha)$; dove b è il limite superiore, α l'ordinata corrispondente all'ascissa a, β all'ascissa b. Noi avremo dunque

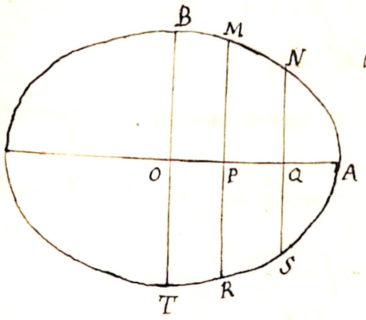
$$x_u = \frac{3}{5}\,\frac{b^2\beta - a^2\alpha}{b\beta - a\alpha} \quad ; \quad y_u = \frac{3}{8}\,\frac{b\beta^2 - a\alpha^2}{b\beta - a\alpha}$$

Nel caso in cui il segmento sia ad una sola base si faccia $a = 0$ si avrà $x_u = \frac{3}{5}b$, $y_u = \frac{3}{8}\beta$. Pel segmento intero RAT il centro è sull'asse ai $\frac{2}{5}$ dell'altezza a partire dal vertice. Le stesse formole valgono ancora pel caso in cui gli assi siano obliqui, o la parabola sia riferita alla tangente e al diametro corrispondente.

L'eq. dell'ellisse riferita agli assi ed al centro essendo $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ sarà

$\int xy\,dx = \frac{b}{a}\int x\,dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{b}{2a}\int d(x^2)\sqrt{a^2-x^2} = -\frac{2}{3}\frac{b}{2a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} =$

$= \frac{-b}{3a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$. E poiché $\sqrt{a^2-x^2} = \frac{ay}{b}$



68.

sarà $\int xy\,dx = \frac{-a^2y^3}{3b^2}$ Poi.

$\int y^2\,dx = b^2\int dx\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}\int dx(a^2-x^2)$

$= b^2x - \frac{b^2}{3a^2}x^3 = \frac{x}{3}(2b^2+y^2)$. Il s'integrale $\int y\,dx = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2-x^2}$ si muta

$= \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{ab}{2}\operatorname{arc}\left(\operatorname{sen} = \frac{x}{a}\right)$

in $\frac{bx}{2a}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{ab}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{bx}{2a}\sqrt{\frac{6a}{2}}\operatorname{arco}\left(\operatorname{sen} = \frac{x}{a}\right)$. Di qui si ricava prendendo gli integrali fra i limiti d ed e chiamando δ, ε le corrispondenti ordinate.

$$x_u = \frac{-\frac{a^2}{3b^2}\left\{\varepsilon^3-\delta^3\right\}}{\frac{e\varepsilon-d\delta}{2} + \frac{ab}{2}\left\{\operatorname{arc}\left(\operatorname{sen}=\frac{e}{a}\right)-\operatorname{arco}\left(\operatorname{sen}=\frac{d}{a}\right)\right\}}$$

$$y_u = \frac{\frac{e}{3}\left\{2b^2+\varepsilon^2\right\}\frac{d}{3}\left\{2b^2+\delta^2\right\}}{e\varepsilon-d\delta+ab\left\{\operatorname{arc}\left(\operatorname{sen}=\frac{e}{a}\right)-\operatorname{arc}\left(\operatorname{sen}=\frac{d}{a}\right)\right\}}$$

Ora la quantità $\operatorname{arc}\left\{\operatorname{sen}=\frac{e}{a}\right\}-\operatorname{arc}\left\{\operatorname{sen}=\frac{d}{a}\right\}$ è eguale a $\operatorname{arc}\left(\operatorname{sen}\frac{e}{a^2}\sqrt{a^2-d^2}-\frac{d}{a^2}\sqrt{a^2-e^2}\right)$ Se si chiami φ quell'arco ausiliario.

$$x_u = \frac{2a^2}{3b^2}\frac{-\varepsilon^3+\delta^3}{e\varepsilon-d\delta+ab\varphi} \qquad y_u = \frac{1}{3}\frac{2b(e-d)+e\varepsilon^2-d\delta^2}{e\varepsilon-d\delta+ab\varphi}$$

Se facciasi il limite superiore $e=a$ sarà $\varepsilon=0$ $\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-d^2}$

allora $x_u = \frac{2a^2}{3b^2}\frac{\delta^3}{-d\delta+ab\varphi}$ e questa vale ancora pure un segmento ellittico

NASQ: $y_u = \frac{1}{3}\,\frac{2b^2(a-d)-d\delta^2}{ab\varphi - d\delta}$. Se si cerchi il centro di gravità a partire da A, sarà la sua distanza da $A = a + \frac{2a^2}{3b^2}\,\frac{\delta^3}{d\delta - ab\varphi}$ ossia

$A = \frac{a}{3b^2}\left\{\frac{3b^2 d\delta - 3b^2 a^2\varphi + 2a\delta^3}{d\delta - ab\varphi}\right\}$, quando si voglia quello del segmento completo. Nel caso in cui si abbia a cercare quello del quadrante ~~intiero~~ ellittico avremo $d=0$ $\delta = b$ $\varphi = \arcsen\{sen = 1\} = \frac{\pi}{2}$ quindi

$x_u = \frac{2a^2}{3b^2}\cdot\frac{2b^3}{ab\pi} = \frac{4}{3}\cdot\frac{a}{\pi}$ e $y_u = \frac{1}{3}\,\frac{2b^2 a}{ab\varphi} = \frac{4}{3}\,\frac{b}{\pi}$. Il quale ultimo x_u serve pure per la semiellisse.

Che se abbiasi l'iperbola $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ riferita agli assi ed in cui x è l'asse trasverso, sarà $\int xy\,dx = \frac{2}{3}\,\frac{b}{2a}\,(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{b}{3a}\,(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{a^3y^2}{3b^2}$; $\int y^2 dx = \frac{b^2}{a}\int dx\,(x^2-a^2) = \frac{b^2}{3a^2}x^3 - b^2x = -\frac{x}{3}(2b^2+y^2)$

$\int y\,dx = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{x^2-a^2} = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{ab}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$= \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}L$ facendo

$L = \log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$. Prendendo queste integrali fra i limiti d e δ cui rispondono le ordinate δ, ε, si trova

$$x_u = \frac{2a^2}{3b^2}\,\frac{\varepsilon^3-\delta^3}{\varepsilon\varepsilon - d\delta - ab\lambda} \qquad y_u = \frac{2}{3}\,\frac{2b^2(d-\varepsilon)+(d\delta^2-\varepsilon\varepsilon^2)}{\varepsilon\varepsilon - d\delta - ab\lambda}$$

Quando si prenda per limite riferente $d=a$ per cui $\delta = 0$ si troverà

$$x_u = \frac{2a}{3b^2}\,\frac{\varepsilon^3}{\varepsilon\varepsilon - ab\lambda'} \qquad y_u = \frac{2}{3}\,\frac{2b^2(a-\varepsilon)-\varepsilon\varepsilon^2}{\varepsilon\varepsilon - ab\lambda'}$$

Dove x_a serve per l'indicato segmento iperbolico a cui la base e λ è il simbolo di $\mathrm{Log}\,(e+\sqrt{e^2-a^2}) - \mathrm{Log}\,(d+\sqrt{d^2-a^2}) = \mathrm{Log}\,\frac{e+\sqrt{e^2-a^2}}{d+\sqrt{d^2-a^2}}$

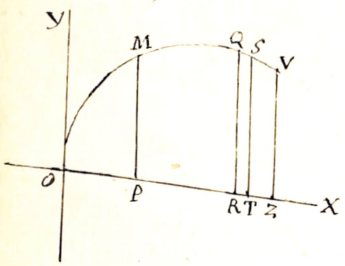
e $\lambda' = \mathrm{Log}\,\frac{e+\sqrt{e^2-a^2}}{a} = \mathrm{Log}\left(\frac{e}{a}+\sqrt{\frac{e^2}{a^2}-1}\right)$.

(Venturoli 72-77; Poisson 69-73 78-80)

LEZIONE XXI.

Centro di gravità delle superficie e dei solidi di rivoluzione – Formole per determinarli – Applicazione al tronco di cono alla calotta di segmento sferico, all'Ellissoide, Paraboloide, ed Iperboloide di rivoluzione.

NEL proseguire la determinazione dei centri di gravità delle superficie dopo aver preso in esame un altra classe di superficie delle superficie di rivoluzione, e cioè quelle generate da una curva rotante intorno ad una retta come asse. Il solido generato dall'area della curva dicesi solido di rivoluzione ed è compreso e limitato dalla superficie di rivoluzione. Sia OV la curva generatrice non potendo



noi comprendere la superficie da essa generata rotando intorno ad OX in cui si può dividere in infinitamente piccole delle quali ciascuna sarebbe generata da un elemento della curva. Ciascuna di queste zone avendo il suo centro sull'asse di rivoluzione, il centro di gravità della superficie totale sarà pure sull'asse OX. Ora dovremo cercare per determinare da l'ascissa di questo centro; ed che giova ricordare che l'elemento della superficie generata dall'elemento QS della curva. che chiameremo ds è $2\pi y ds$ come insegna il calcolo differenziale. Il momento di quest'elemento superficiale sarà dunque $2\pi y ds$ moltiplicato per la distanza del suo centro di

gravità da O. La quale distanza è compresa fra OR e OT cioè fra x ed x+dx; ed essendo dx è trascurabile rispetto ad x avremo pel momento cercato $2\pi xy\,ds$. La somma di tutti questi momenti sarà $2\pi\int xy\,ds$ dovendo essere eguale al momento della superficie totale S, che è $x_u \times S$ ove S = somma degli elementi $2\pi y\,ds = 2\pi\int y\,ds$. Avremo dunque $x_u \times 2\pi\int y\,ds = 2\pi\int xy\,ds$ onde

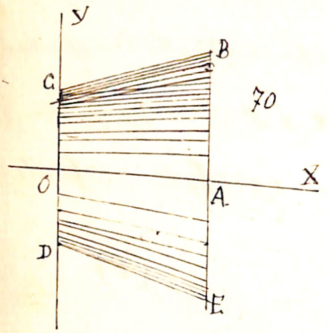
$$x_u = \frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds} \qquad \text{---------- (1)}$$

Per egual modo considerando l'elemento del volume di rivoluzione generato dall'elemento QSRT dell'area potrà ai limiti esso calcolato come un cilindro retto di cui il raggio della base è QR = y e l'altezza RT = dx. L'espressione dell'elemento del volume sarà dunque $\pi y^2 dx$ ed il volume totale in conseguenza $\pi\int y^2 dx$. Ma il momento dell'elemento suddetto sarà $\pi y^2 dx$ moltiplicato per la distanza da O al suo centro di gravità che cade fra R e T sull'asse x. Sarà dunque il volume totale moltiplicato per x_u eguale alla somma dei momenti $\pi xy^2 dx$: onde

$$x_u = \frac{\int xy^2 dx}{\int y^2 dx} \qquad \text{. . . . . (2)}$$

Le formole (1) e (2) come pure quella della precedente lezione suppongono l'area circonferenza gravata di pesi ed il volume o il corpo perfettamente omogeneo.

Si a trovare il centro di gravità della superficie del tronco di cono generata dalla retta CB che gira attorno ad OA. Sia OC=r AB=R, OA=a; l'eq della retta CB sarebbe $y-r=\frac{R-r}{a}x=mx$ ponendo per brevità $\frac{R-r}{a}=m$. Quindi sarà $\int xy\,ds=\int(xr+x^2m)\,ds$. e poichè $m=\frac{dy}{dx}$ sarà $ds=dx\sqrt{1+m^2}$; onde



$$\int xy\,ds=\sqrt{1+m^2}\int(rx+mx^2)\,dx=\sqrt{1+m^2}\left(\frac{rx^2}{2}+\frac{mx^3}{3}\right)$$

Si ha poi $\int y\,ds=\sqrt{1+m^2}\int(r+mx)\,dx=\sqrt{1+m^2}\left(rx+\frac{mx^2}{2}\right)$ Prendendo i 2 integrali fra i limiti 0 ed a si avrà poi $x_u=\frac{\frac{1}{2}ra+\frac{1}{3}ma^2}{r+\frac{1}{2}ma}$, sostituendo a m, $\frac{R-r}{a}$ si cangia in

$$x_u=\frac{1}{3}a\,\frac{2R-r}{R+r}.$$

Che è precisamente la medesima regola che avrebbe il centro di gravità del tronco EBCD.

Per trovare il centro di gravità del solido dello stesso tronco, noi abbiamo

$$\int xy^2dx=\int x.dx\,(r+mx)^2=\int dx\,(r^2x+2rmx^2+m^2x^3)=\frac{r^2x^2}{2}+\frac{2rmx^3}{3}+\frac{m^2x^4}{4}$$

$$\int y^2dx=\int dx\,(r+mx)^2=\int dx\,(r^2+2rmx+m^2x^2=r^2x+rmx^2+\frac{m^2x^3}{3}$$

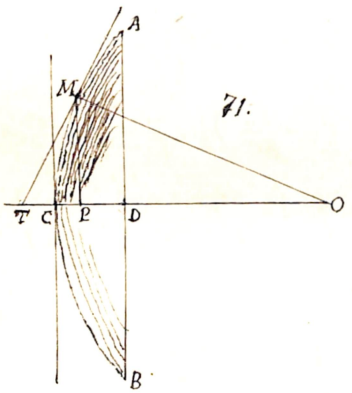
Onde prendendo fra i limiti 0 e a si trova

$$x_u=\frac{6r^2a^2+8mra^3+3m^2a^4}{12r^2+12rma+4m^2a^3};\ \text{ossia}.$$

$$x_u = \frac{6r^2a + 8r(R-r)a + 3(R^2-2rR+r^2)a}{12r^2 + 12r(R-r) + 4(R^2+2rR+R^2)} = a\,\frac{3R^2+2Rr+r^2}{4R^2+4Rr+4r^2}\,;$$ e

finalmente $x_u = \frac{1}{4}a\,\frac{3R^2+2Rr+r^2}{R^2+Rr+r^2}$. Moltiplicando sotto e sopra per $R-r$ si trova $x_u = \frac{1}{4}a\,\frac{r^3+Rr^2+R^2r-3R^3}{r^2-R^3}$

Il qual valore coincide con quello trovato nella Leg XVII quando si faccia $r=p$ $R=q$.



71.

Sia la calotta sferica ACB generata dalla rivoluzione dell'arco AC intorno alla saetta CD. Se si prende C per origine l'equazione del circolo generatore sarà $y^2 = 2ax - x^2$

$ds = dx\,\frac{a}{y}$. Sarà dunque

$$\int xy\,ds = \int xy\,dx\,\frac{a}{y} = a\int x\,dx = \frac{ax^2}{2}$$

$$\int y\,ds = \int y\,dx\,\frac{a}{y} = \int a\,dx = ax$$

onde $x_u = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2}$

Cioè il centro di gravità della calotta sferica è nel punto di mezzo della saetta CD: poichè pei limiti 0 e h $x_u = \frac{h}{2}$. Quanto al centro di gravità del volume noi avremo $\int xy^2dx = \int x\,dx\,(2ax - x^2) = \frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4$

$\int y^2dx = \int dx\,(2ax - x^2) = ax^2 - \frac{x^3}{3}$ epperò $x_u = h\,\frac{8a-3h}{12a-4h}$,

prendendo gli integrali fra i limiti 0 e h, questo coincide perfettamente col valore trovato nella (Leg XIX)

Nel caso di una volta sferoidale essendo l'equazione dell'ellisse riferita al vertice $y^2 = \frac{b^2}{a}(2ax - x^2)$ sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a-x}{y}$ e

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{b^4}{a^4}\frac{(a-x)^2}{y^2}} = \frac{dx}{dy}\sqrt{a^2y^2 + b^4\frac{(a-x)^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{dx}{dy}\sqrt{a^2y^2 - b^2\frac{b^2}{a^2}(a^2 - 2ax + x^2)} = \frac{dx}{dy}\sqrt{a^2y^2 + b^4 - b^2\frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)}$$

$$= \frac{dx}{dy}\sqrt{a^2y^2 + b^4 - b^2y^2} = \frac{dx}{dy}\sqrt{b^4 + c^2y^2}\,,\ \text{quindi si avrà}$$

$$\int x.y.ds = \frac{1}{a}\int x\,dx\sqrt{b^4 + c^2y^2} = \frac{1}{a}\int x\,dx\sqrt{b^4 + \frac{2c^2b^2}{a^2}x - \frac{c^2b^2}{a^2}x^2}$$

$$\int x.dx\sqrt{b^4 + \frac{2c^2b^2}{a^2}x - \frac{c^2b^2}{a^2}x^2} = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{ax}{6} - \frac{a^2}{12} - \frac{ba^2}{3c^2}\right)\sqrt{b^4 + \frac{2c^2b^2}{a^2}x - \frac{c^2b^2}{a^2}x^2}$$

$$+\left(\frac{1}{2}c^2b^2a + \frac{1}{2}b^4a\right)\frac{a}{bc}\,\text{arc}\left\{\text{sen} = \frac{2\frac{c^2b^2}{a^2}x + 2\frac{c^2b^2}{a}}{\sqrt{4c^4b^4 + 4b^6c^2}}\right\}$$

$$= \int\left(\frac{x^2}{3} - \frac{ax}{6} - \frac{a^2}{12} - \frac{ba^2}{3c^2}\right)\sqrt{b^4 + \frac{2c^2b^2}{a}x - \frac{c^2b^2}{a^2}x^2}$$

$$\left.+\ \frac{a^4b}{2c}\,\text{arc}\left\{\text{sen} = -\frac{c(x+a)}{a^2}\right\}\right\} = \left\{\begin{array}{l} M^2\sqrt{b^4 + c^2y^2} \\ +\ \frac{a^4b}{2c}\,\text{arc}\left\{\text{sen} = \frac{-b}{a^2}(x+a)\right\}\end{array}\right)$$

dove $c^2 = a^2 - b^2$ $M^2 = \frac{x^2}{3} - \frac{ax}{6} - \frac{a^2}{12} - \frac{ba^2}{3c^2}$ Si ha poi.

$$\int y\,ds = \frac{1}{a}\int dx\sqrt{b^4 + \frac{2c^2b^2}{a}x - \frac{c^2b^2}{a^2}x^2} = \int dx\sqrt{b^4 + \frac{2c^2b^2}{a}x - \frac{c^2b^2}{a^2}x^2}$$

$$= \frac{-x+a}{2}\sqrt{b^4 + c^2y^2} + \frac{1}{2}\frac{ba^3}{c}\,\text{arc}\left\{\text{sen} = -\frac{c(x+a)}{a^2}\right\}$$

Onde si ricaverebbe $x_4 = \frac{2M^2K^3 + a^4b\varphi - 2M^2K^2 - a^2b\varphi'}{(a-x)K^2 + a^2b\varphi - ab^2 - a^2b\varphi'}$

Dove $M^2 = -\frac{a^2}{12} - \frac{a^2b^2}{3c^2}$ $\varphi' = \text{arc}\left\{\text{sen} = -\frac{c}{a}\right\}$ In simil guisa si otterrebbe

per l'ipsoloide

Per la calotta di paraboloide della cui generatrice sia $y^2 = 2px$ l'eq. si avrà

$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$ onde $ds = dx\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}} = \frac{dx}{y}\sqrt{p^2+y^2}$ e perciò

$$\int xy\,ds = \int x\,dx\sqrt{p^2+y^2} = \int x\,dx\sqrt{p^2+2px} = \left[\frac{p}{5}(p+2x) - \frac{p^2}{3}\right]\frac{2(p^2+2px)^{\frac{3}{2}}}{15p^2}$$

$$= \frac{\sqrt{p}}{15}(3x-p)(2x+p)\sqrt{p+2x}\,,$$ e poi..

$$\int y\,ds = \int dx\sqrt{p^2+2px} = \sqrt{p}\int dx\sqrt{p+2x} = \frac{\sqrt{p}}{3}(p+2x)\sqrt{p+2x}$$

Prendendo quest'ultimi integrali fra i limiti zero e h si avrà.

$$x_u = \frac{(3h-p)(2h+p)\sqrt{2h+p} + p^3}{5(2h+p)\sqrt{2h+p} - p^3}$$

Pel segmento ellissoidale ad una sola base si ha'.

$$\int y^2\,dx = \frac{a^2}{b^2}\int dx\,(2ax-x^2) = \frac{a^2}{b^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right)$$ e fra i limiti $\frac{a^2}{b^2}\left(ah^2 - \frac{h^3}{3}\right)$

$$\int xy^2\,dx = \frac{a^2}{b^2}\int x\,dx\,(2ax-x^2) = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4\right)$$ e ..... $\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{2}{3}ah^3 - \frac{h^4}{4}\right)$

onde risulta $x_u = h\,\frac{8a-3h}{12a-4h}$ come pel segmento sferico, per il semiellissoide $h=a$ $x_u = \frac{5}{8}a$

Pel segmento di iperboloide a una sol base si ha

$\int y^2\,dx = \frac{a^2}{b^2}\int dx\,(x^2+2ax) = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{x^3}{3}+ax^2\right)$; poichè $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2+2ax)$

e fra i limiti $\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{h^3}{3}+ah^2\right)$: poi $\int_0^h xy^2\,dx = \frac{a^2}{b^2}\int_0^h x\,dx\,(x^2+2ax)$

$= \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{h^4}{4}+\frac{2}{3}ah^3\right)$: ne segue $x_u = h\,\frac{3h+8a}{12h+4a}$; onde si vede che

la formola che da il valore di x_u poco scrive per l'ellissoide e per l'ip

e per l'iperboloide $x_u = h \frac{2h+3a}{12h+11a}$

Servendo i soliti segni per l'ellissoide e gli esponenti per l'iperboloide. Quando $h=a$ nell'iperboloide si ha $x_u = \frac{11}{15} u$

Ma pel segmento di paraboloide ad una sola base è

$$\int y^2 dx = \int 2px\,dx = px^2; \quad \int xy^2 dx = \int 2px^2 dx = \frac{2}{3} px^3$$

ossia

$$x_u = \frac{2}{3} x$$

È dunque ai $\frac{2}{3}$ della retta. Del solido generato da una semi-iperbole equilatera intorno al suo asintoto (la cui eq. sarebbe $y = \frac{1}{1+x}$)

sarebbe $\dfrac{\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^2} dx}{\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2} dx} = \infty$ Ma limitando questo solido all'ascissa u si trova $x_u = \left(1+\frac{1}{u}\right) \log(1+u) - 1$

Del solido generato dall'intera iperbole $x_u = \dfrac{\int_0^\infty \frac{dx}{x}}{\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}} = \frac{\infty+\infty}{\infty} = \infty$

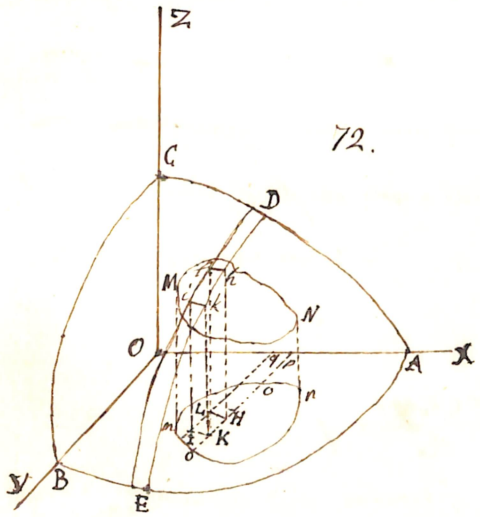
il qual risultato si ottiene colla differenziazione.

(Venturoli 78-81, Poisson 81-83, 85-90)

LEZIONE XXII.

Centri di gravità di porzioni qualunque di superficie curve ed omogenee - Applicazione all'emisfero e teorema notevole che se ne trae - Sua analogia col teorema sul centro di gravità di un arco circolare - Formole pei centri di gravità di volumi omogenei limitati da superficie qualunque.

VENGASI ora alla determinazione generale del centro di gravità di una porzione qualunque di superficie curva. Riferiamoci ai 3 assi OX, OY, OZ. la superficie qualunque ABC. Supponiamo che su di essa ~~sia~~ tracciata la curva MN e che si voglia trovare il centro di gravità della porzione della superficie compresa dentro quella curva che supporremo chiusa. Sia mn la proiezione di MN sul piano xy; supporremo che l'eq. di MN sia $y = \varphi(x)$, mentre prenderemo $z = f(x,y)$ per l'equazione della superficie.



72.

Da un punto qualunque L della MN abbassata la Ll e da L la Lq sarà $Oq = x$, $q1 = y$ $Ll = z$. Si prenda poi su MN un altro punto infinitamente vicino K: si abbassino kK e Kp; sarà $Op = x + dx$; $pK = y + dy$; $kK = z + dz$. Se per L, K, LH KI parallele ad Ox la figura LHKI sarà un rettangolo di lati $KH = Kp - Lq = dy$ e $Hl = pq = dx$. La sua area sarà dunque $dx.dy$.

Per i quattro lati del parallelogrammo LHKI si elevino quattro piani verticali che li taglieranno e comprenderanno fra loro un elemento lkki' della superficie MN. Siccome noi possiamo considerare quest'elemento come piano e confondentesi col piano tangente in l o in k, l'area lkki' sarà per un noto teorema di geometria (la proiezione su un piano d'un'area piana è eguale a quest'area pel coseno dell'angolo che fa col piano di proiezione) eguale a LHKI o $dx.dy$ moltiplicata pel coseno dell'angolo che fa il piano tangente già detto col piano delle xy. Ora si farà

$$\frac{dz}{dx} = \frac{df(x,y)}{dx} = p \qquad \frac{df(x,y)}{dy} = q.$$

ci sarà data per questo coseno dalla geometria a 3 dimensioni l'espressione $\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$; l'area dell'elemento lkki' o $d\sigma$ sarà eguale a $dx.dy\sqrt{1+p^2+q^2}$ dove p e q sono funzioni di x e di y.

Quindi tutta la superficie MN ~~curva~~ avrà per area l'integrale doppio $\iint dx.dy\sqrt{1+p^2+q^2}$ compreso fra certi limiti che bisogna determinare.

Se noi incominciamo a considerare **x** come costante cioè integriamo solo rispetto ad y noi potremo scrivere l'integrale così, $\int dx \int dy \sqrt{1+p^2+q^2}$ dove p e q per ora si considerano come funzioni del solo y. L'elemento $dx \int dy \sqrt{1+p^2+q^2}$ rappresenta la zona DE di superficie compresa tra 2 piani ortogonali all'asse x e distante dall'origine di x e x+dx; (calcolo integrale); onde noi dovendo di tale zona prender la parte compresa nel perimetro MN dovremo prender tal integrale fra $y=p_0$ e $y'=p_0'$, cioè $y_1=\varphi_1(x)$ e $y_2=\varphi_2(x)$, rappresentando con $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ i due valori che l'equazione $y=\varphi(x)$ dà per y ad ogni valor di x, e che dee dare anche la curva è chiusa.

Il primo integrale si dee dunque prender fra i limiti $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$. Facciam in conseguenza $\int dy\sqrt{1+p^2+q^2}=\Psi'(y)$. Prendendo l'integrale fra i limiti detti si avrà.

$$\int_{y_1}^{y_2} dy\sqrt{1+p^2+q^2} = \Psi[\varphi_2(x)] - \Psi[\varphi_1(x)] = \Pi(x)$$

in generale. L'espressione dell'area MN sarà ridotta a $\int dx\,\Pi(x)$

Il quale ultimo integrale, se a e b, siano le ascisse dei punti di mn che hanno loro tangente parallela all'asse y e le ascisse limiti di MN, dee prendersi fra i limiti a e b, così sarà l'espressione dell'area MN.

$$\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \sqrt{1+p^2+q^2} \quad \ldots \quad (1)$$

e questo sarà il fattore da moltiplicato con le coordinate x_u y_u z_u del centro cercato di gravità deve eguagliare la somma dei momenti dei singoli elementi. Or le coordinate del centro di gravità dell'elemento $dx.dy$ sono comprese evidentemente fra x e $x+dx$, y e $y+dy$; z e $z+dz$: ma siccome dx, dy, dz, sono nulli rispetto a x, y, z: così i momenti dell'elemento $dx.dy\sqrt{1+p^2+q^2}$ diventano rispetto ai 3 piani coordinati:

$$x.dx.dy.\sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$y\,dx.dy\sqrt{1+p^2+q^2}; \quad z.dx.dy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

e le somme loro saranno.

$$\iint x\,d\sigma = \iint x.dx.dy\sqrt{1+p^2+q^2}; \quad \iint y\,d\sigma = \iint y.dx.dy\sqrt{1+p^2+q^2}$$

$$\iint z\,d\sigma = \iint z.dx.dy\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Dalle equazioni $x_u\sigma = \iint x\,d\sigma$, $y_u\sigma = \iint y\,d\sigma$, $z_u\sigma = \iint z\,d\sigma$ si ricava per le coordinate del centro della superficie MN

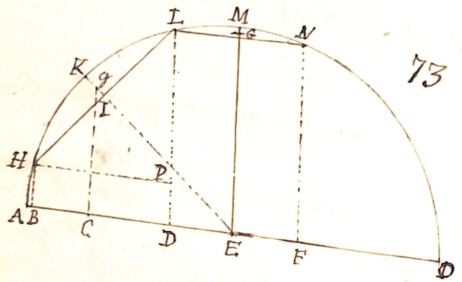
$$(2)\quad \begin{cases} x_u = \dfrac{\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\varphi_2(x)} x\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}}{\int_a^b dx \int_{\varphi x}^{\varphi_1(x)} dy\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ y_u = \dfrac{\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\varphi_1(x)} y\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}}{\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1(x)} dy\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ z_u = \dfrac{\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\varphi_1(x)} z\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}}{\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1(x)} dy\sqrt{1+p^2+q^2}} \end{cases}$$

Sia per esempio una sfera la cui equazione riferita al centro è $x^2+y^2+z^2=a^2$, differenziandola si trova $\frac{dz}{dx} = p = -\frac{x}{z}$; $\frac{dz}{dy} = q = -\frac{y}{z}$; onde $\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{1}{z}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{a}{z}$ Prendiamo l'espressione generale di z_u e sostituiamovi questo valore, noi avremo chiamando σ l'area MN.

$$z_u = \frac{a\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\varphi_2(x)} dy}{\sigma}$$

Ora evidentemente l'espressione $\int_a^b dx \int_{y'x'}^{y''x''} dy$ altro non è che l'area mn della proiezione di MN. Chiamando A quest'area si avrà $\frac{z}{a} = a\frac{A}{\sigma}$ onde il Gallissimo teorema che la distanza del centro di gravità dal piano xy è quarta proporzionale dopo l'area MN la sua proiezione sul piano, e il raggio della sfera.

Prendendo dunque successivamente per piano xy i 3 piani coordinati si determineranno xa, ya, za per mezzo del raggio della sfera, dell'area MN, e dell'area delle 3 proiezioni di MN sui 3 piani coordinati. Questo notabile teorema è la generalizzazione di quello esposto nella Lez XIX; la distanza del centro y di gravità dell'arco circolare HH dal centro E è quarta proporzionale dietro l'arco HKI, la corda HI, ed il raggio KE.



73

Quando l'arco ha la corda parallela al piano AO dei momenti come LMN vedesi subito la corda LN essere eguale alla proiezione dell'arco su AG cioè a DF. Eppero si può subito stabilire che EG è quarta proporzionale dietro l'arco il raggio e la sua proiezione sul piano AO. Per un arco qualunque HKI si dovrà dire

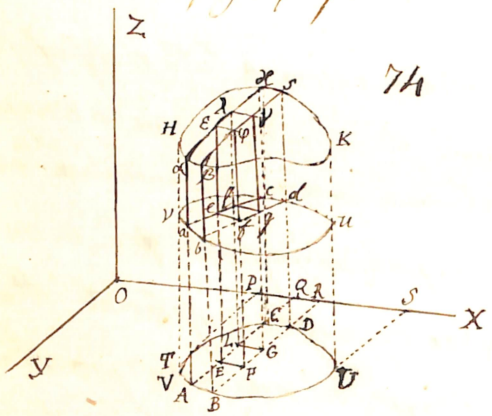
dietro il teorema della Lez XIX si ha $gE = \frac{KE \times HL}{HKL}$. Proiettiamo g in G e HL in BD e si tiri HP eguale e parallela a BD. I triangoli gGE, HLP, avendo i lati tutti fra loro perpendicolari saranno simili, e avremo $gE : gG :: HL : HP$, onde $gE = \frac{gG \times HL}{HP}$. Eguagliando i 2 valori di gE e togliendo HL fattor comune risulterà $\frac{KE}{HKL} = \frac{gG}{HP}$, e poichè $HP = BD$, $gG = \frac{KE \times BD}{HKL}$ cioè la distanza di g al piano AC è quarta proporzionale dopo l'arco, il raggio e la sua proiezione. Nella formola Z_n avrà generalizzato questo teorema ed estesa alle n dimensioni.

Il teorema $Z_n = a \frac{A}{G}$ si estende ancora a tutte le superficie canali generate da un semicerchio che scorre comunque su di un piano volta sua faccia tenendosi a quel piano sempre perpendicolare. Poichè per queste superficie il piano tangente in un punto qualunque di un piano in cui si fa la generazione un angolo complemento dell'angolo fatto collo stesso piano dal raggio del semicerchio generatore condotto al punto di tangenza. Ora quest'angolo avendo evidentemente per seno $\frac{z}{a}$, sarà $\frac{z}{a}$ il coseno dell'angolo che fa il piano tangente col piano della generazione, e viceversa $\sqrt{1+p^2+q^2}$ sarà $= \frac{a}{z}$. Da questa condizione abbiamo ricavato il teorema suddetto. Notiamo soltanto che sarà solo pel piano di generazione che tale coseno sarà

avrà luogo.

Centro di gravità di un volume qualunque omogeneo.

Pelbanni Trovare le coordinate del centro di gravità di un volume qualunque HKVU limitato superiormente e inferiormente dalle 2 faccie di una superficie multipla la cui equazione sia $z = f(x,y)$ e dalle pareti verticali di un cilindro KHVU avente per base la curva piana VU la cui eq.ne è $y = \varphi(x)$, e che essendo chiusa ad ogni valore di x darà 2 valori $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$ per y, E questo il caso più generale che si possa proporre.



Presa un ascissa $OQ = x$ un ordinata $Q1. = y$ si elevi $1,\lambda$; per x si avranno 2 valori $1,\lambda$, essia sarà $z_1 = f_1(x,y)$ $z_2 = f_2(x,y)$ Prendasi un altra ascissa $OR = x + dx$, e un altra ordinata $Rr = y + dy$; se si unisce come per la superficie il rettangoletto $EFGH = dx\,dy$ e si elevano pei suoi lati li piani ortogonali all'xy; tali piani intersetteranno fra loro un elemento efgHEFGK che ai limiti potrà esser considerato come un parallelepipedo di altezza $f_2(x,y) - f_1(x,y)$ e di base $dx.dy$. Onde l'espressione

sua sarà $dx.dy\left[f_2(x,y)-f_1(x,y)\right]$. Ora si ha per lo strato $abcd\,z\,\beta\times\delta$ compreso fra 2 piani paralleli al xy e distanti fra loro di dx.

$dx\int_{oc}^{AC} dy\left[f_2(x,y)-f_1(x,y)\right]$: cioè $\int_{oc}^{AC} dy\,(z_2-z_1)$ esprime l'area $Bbdc$. Siccome $AC=\varphi_2 x$, $oc=\varphi_1 x$, integrando la seconda volta fra i limiti $cp=a$, $cs=b$, sarà il volume totale $HKJM$ espresso da

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dy\left[f_2(x,y)-f_1(x,y)\right]$$

Questo moltiplicato per le coordinate $x_u\ y_u\ z_u$ del centro di gravità deve essere eguale alla somma dei momenti dei singoli elementi $efgl\,\varepsilon\varphi\lambda\lambda$ rispetto ai 3 piani. Or le coordinate del centro di gravità di questo parallelepipedo saranno $x+\frac{dx}{2}$; $y+\frac{dy}{2}$; $\frac{1}{2}(z_1+z_2)$; epperò sarà il momento suo rispetto al piano zy, trascurando i termini infinitesimi, eguale a $x.dx.dy\,(z_2-z_1)$; rispetto all'xz, $y.dx.dy.(z_2-z_1)$; rispetto all'xy; $\frac{1}{2}dx.dy\,(z_2-z_1)(z_2-z_1)=\frac{1}{2}dx.dy\,(z_2^2-z_1^2)$

Onde le 3 coordinate del centro di gravità saranno quando si osservi che $z_1=f_1(x,y)$ $z_2=f_2(x,y)$

$$(3)\quad \begin{cases} x_u=\dfrac{\int_a^b dx\int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dy\,x\left[f_2(x,y-f_1(x,y)\right]}{\int_a^b dx\int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dy\left[f_2(x,y)-f_1(x,y)\right]}\ ;\ y_u=\dfrac{\int_a^b dx\int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dy.y.\left[f_2(x,y)-f_1(x,y)\right]}{\int_a^b dx\int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dy\left[f_2(x,y)-f_1(x,y)\right]} \\ z_u=\dfrac{1}{2}\dfrac{\int_a^b dx\int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dy\left\{\left[f_2(x,y)\right]^2-\left[f_1(x,y)\right]^2\right.}{\int_a^b dx\int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dy\left[f_2(x,y)-f_1(x,y)\right]} \end{cases}$$

(Poisson 78, 91)

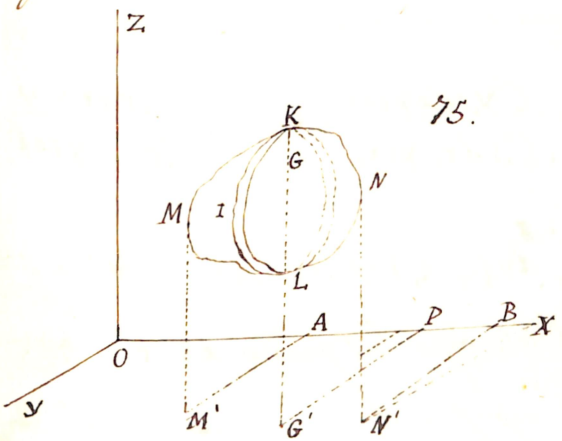
LEZIONE XXIII.

Centri di gravità dei corpi qualunque eterogenei e formole per determinarli — Applicazione all'emisfero, al cono, ed al cilindro, per rischiarare i 3 casi che possono accadere in questa determinazione; cioè che la densità sia funzione di 3 o di 2 o di una variabile

Si tratta ora di venire a scoprire le formole generali che danno il centro di gravità di un corpo qualunque eterogeneo in cui la densità varii da punto a punto secondo date leggi. Incominciamo dal caso più semplice che è quello di un corpo composto di strati piani omogenei e infinitamente sottili, e in cui la densità varia da strato a strato secondo una legge dipendente dalla distanza di ciascun strato al primo di tutti gli strati

Sia MN questo corpo o una porzione qualunque di esso; prendasi l'asse x perpendicolarmente al piano di stratificazione, e in uno stesso x ancorchè y e z varino la densità d rimarrà sempre la stessa, ma facendo variare x alla nuova ascissa corrisponderà un altro strato e una densità diversa; dimodochè sarà $d = \varphi x$; Posto $OP = x$ condu-

per P un piano perpendicolare all'asse x che tagli il corpo secondo la sezione LKI parallelamente ai piani degli stati, poi facendo passare pure piano a questo parallelo e infinitamente vicino, questi 2 piani intercetteranno un segmento KLI che potremo riguardare come un cilindro avente per base la sezione KLI e per altezza la distanza dei 2 piani, o dx. La densità per questo cilindro sarà uniforme; difatti variando x infinitamente poco, S che è funzione di x varierà pure infinitamente poco o niente. Se dunque si chiami S l'area della sezione, l'elemento del volume sarà S.dx, e poichè il peso o la massa (che qui è tutt'uno) è il volume per la densità $=\psi(x)$, sarà la massa elementare $= S\,dx\,\psi(x)$ e la massa totale sarà $\int_a^b S\,dx\,\psi(x)$, dove a e b sono le ascisse OA, OB, pei quali i piani paralleli ad yz sono tangenti al corpo. Quanto ai momenti dell'elemento per trovarli bisogna conoscere il suo centro g di gravità.



75.

Il quale coincidendo con quello dell'area S avrà per ascissa x, e per ordinate y e z eguali a GG' e GL e che abbiamo già imparato a determinare. I tre momenti dell'elemento saranno dunque $xS\,dx\,\psi(x)$ rispetto al piano zy, e $yS\,dx\,\psi(x)$ e $zS\,dx\,\psi(x)$ rispetto ai piani zx e xy. Onde finalmente avremo dal teorema dei momenti

$$x_1 = \frac{\int_a^b xS\,dx\,\psi(x)}{\int_a^b S\,dx\,\psi(x)} \quad ; \quad y_1 = \frac{\int_a^b yS\,dx\,\psi(x)}{\int_a^b S\,dx\,\psi(x)} \quad ; \quad z_1 = \frac{\int_a^b zS\,dx\,\psi(x)}{\int_a^b S\,dx\,\psi(x)}$$

ora sappiamo che $S = \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dy\,(z_2 - z_1)$ essendo $\varphi_1(x)$ $\varphi_2(x)$ le 2 ordinate y della proiezione del corpo sul piano xy, e z_1 z_2 le 2 ordinate GL, GK della superficie che supponiamo a 2 falde. Avremo dunque

$$y = \frac{\int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} (z_2 - z_1)\,y\,dy}{\int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} (z_2 - z_1)\,dy} \qquad z = \frac{1}{2}\,\frac{\int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} (z_2^2 - z_1^2)\,dy}{\int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} (z_2 - z_1)\,dy}$$

eppers i valori delle coordinate diventeranno.

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\int_a^b x\,dx\,\psi(x) \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dy\,(z_2 - z_1)}{\int_a^b \psi(x)\,dx \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dy\,(z_2 - z_1)} \\ y_1 = \dfrac{\int_a^b \psi(x)\,dx \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} y\,dy\,(z_2 - z_1)}{\int_a^b \psi(x)\,dx \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dy\,(z_2 - z_1)} \quad ; \quad z_1 = \dfrac{\frac{1}{2}\int_a^b dx\,\psi(x) \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} (z_2^2 - z_1^2)\,dy}{\int_a^b dx\,\psi(x) \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dy\,(z_2 - z_1)} \end{cases}$$

Abbiasi per esempio un cilindro coll'asse sull'asse x e colla base sul piano xy composto di strati perpendicolari all'asse, e la cui densità sia in ciascuno direttamente proporzionale alla loro distanza dalla base. Sia Δ la densità della base, Δ' la densità dello strato che limita il cilindro dalla parte opposta, δ la densità dello strato che dista da x dalla base. Noi avremo $\Delta - \delta : x :: \Delta - \Delta' : b$. chiamando b l'asse del cilindro. Onde $\delta = \frac{x}{b}(\Delta' - \Delta) + \Delta$. Se r sia il raggio del cilindro sarà $S = \pi r^2$; onde serbando il valore di x (che degli altri non abbisogniamo essendo il centro di gravità sull'asse x, asse del cilindro) avremo

$$x_1 = \frac{\int_a^b dx.\pi r^2 x\left(\frac{x}{b}\{\Delta' - \Delta\} + \Delta\right)}{\int_a^b dx.\pi r^2\left(\frac{x}{b}\{\Delta' - \Delta\} + \Delta\right)} = \frac{\frac{b^3}{3b}(\Delta' - \Delta) + \frac{b^2}{2}\Delta}{\frac{b^2}{2b}(\Delta' - \Delta) + b\Delta} =$$

$$= \frac{b}{3}\,\frac{\Delta + 2\Delta'}{\Delta + \Delta'}$$

Veniamo ora che la densità del corpo compreso tra le 2 faccie della superficie $z = f(x,y)$ e tra le pareti del cilindro retto la cui base ha per equazione $y = \varphi(x)$ vari con x e con y in modo che sia $\delta = \psi(x,y)$. Se noi mettiamo per δ un valore qualunque

ne ricaveremo l'equazione $\psi(x,y) = a$ d'un cilindro retto lungo la cui superficie la densità è costante. E facendo variare a avremo l'equazione di un altro cilindro; onde supposto il corpo può immaginarsi formato da tanti strati cilindrici a basi qualunque, concentrici, omogenei, infinitamente sottili e a pareti verticali. Se dei prendiamo sul piano xy il rettangoletto infinitesimale $dx.dy$ e sopra quello erigiamo un parallelepipedo che abbia per limite superiore e inferiore le 2 facce della superficie $z = f(x,y)$, noi potremo considerare questo parallelepipedo come omogeneo, perchè la densità non varia dal suo cop al fondo. L'espressione del volume di questo cilindro (v. pag 157) $dx.dy(z_2 - z_1)$ la sua massa sarà perciò $dx.dy(z_2 - z_1)\psi(x,y)$. Epperò la massa totale del corpo sarà

$$M = \int_a^b \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dx.dy.(z_2 - z_1)\psi(x,y)$$

Le coordinate del centro di gravità di quel parallelepipedo essendo x,y e $\frac{1}{2}(z_2 + z_1)$ i momenti dell'elemento saranno

$$x.dx.dy(z_2 - z_1)\psi(x,y) \; ; \; y.dx.dy.(z_2 - z_1)\psi(x,y)$$

$$dx.dy(z_2^2 - z_1^2)\psi(x,y)$$

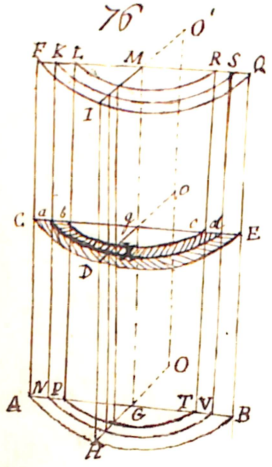
Onde si ricavano

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\int_a^b dx \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} x\,dx\,dy\,(z_2 - z_1)\,\psi(x,y)}{\int_a^b dx \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dx\,dy\,(z_2 - z_1)\,\psi(x,y)}\,; \\ y_1 = \dfrac{\int_a^b dx \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} y\,dx\,dy\,(z_2 - z_1)\,\psi(x,y)}{\int_a^b dx \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dx\,dy\,(z_2 - z_1)\,\psi(x,y)}\,; \\ z_1 = \dfrac{\int_a^b dx \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dx\,dy\,(z_2^2 - z_1^2)\,\psi(x,y)}{2\int_a^b dx \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} dx\,dy\,(z_2 - z_1)\,\psi(x,y)}\,; \end{cases}$$

Sia a far l'applicazione di queste formole ad un cilindro retto a base circolare, composto di tanti strati cilindrici omogenei e concentrici. Sia tagliato questo cilindro da un piano parallelo all'asse, questo piano taglierà dal cilindro un segmento, la cui base sarà un segmento di circolo. Supponiamo che la densità di ciascun strato cilindrico abbia tal rapporto col raggio r della base di questo che sia $\delta = f(r)$. Si domanda il centro di gravità del segmento

Sia AHB (fig 76) il segmento di circolo che serve di base, e il suo centro, e primieramente ne dividiamo per metà l'altezza GH del segmento, e pel punto di mezzo g facciamo passare una qualun-

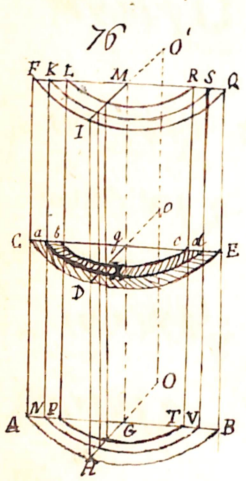
parallelo alla base, il centro di gravità si troverà evidentemente su questo piano CDE. Di più se per l'asse OO' facciamo passare un piano ortogonale ad FQAB, tal piano dividerà per mezzo tutto il solido; il quale essendo rispetto ad esso simmetrico avrà nel piano TMGH il suo centro di gravità eguale nella gD. Se rispetto ora alla base circolare infinitamente sottile KLMDTVRS è già alla corona circolare abcd che si prende di base moltiplicata per la densità e per l'altezza, che di più l'altezza del segmento in ragion fattore nell'espressione della sua massa;



fatto è il vedere come l'espressione delle coordinate del centro di gravità x, y, conterrà questo fattore al numeratore ed al denominatore; epperò la distanza gX sarà indipendente dall'altezza del cilindro. Supporterà dunque ancora gX la stessa quando l'altezza del cilindro sia infinitamente piccola, o meglio quando la generatrice sia ridotta alla segmentale. Dato un segmento circolare della cui corona elementare la densità è espressione del raggio, trovare il centro di gravità di tal segmento.

Sia ADB tal segmento, MON un segmento di corona elementare r il suo raggio, a il raggio del cerchio, b la saetta data DE. L'espressione della massa della corona sarà $f(r)dr\,arc\,MN$. Ora s'ha area

parallelo alla base, il centro di gravità si troverà evidentemente su questo piano CDE. Di più se per l'asse OO' facciamo passare un piano ortogonale ad FQAB, tal piano dividerà per mezzo tutto il solido; il quale essendo rispetto ad esso simmetrico avrà nel piano MNGH il suo centro di gravità epperciò sulla GD. Se ripetiamo ora che lo sbato cilindrico infinitamente sottile KLMPTVRS è equale alla corona circolare abcd che gli serve di base moltiplicata per la densità e per l'altezza, che di più l'altezza del segmento entra come fattore nell'espressione della sua massa; fatto è il vedere come l'espressione delle coordinate del centro di gravità X, Y, conterrà questo fattore al numeratore ed al denominatore, cioè la distanza gX sarà indipendente dall'altezza del cilindro. Resterà dunque ancora gX la stessa, quando l'altezza del cilindro sia infinitamente piccola, o meglio quando la questione sia ridotta alla seguente: Dato un segmento di circolo delle cui corone elementari la densità è espressione del raggio, trovare il centro di gravità di tal segmento.

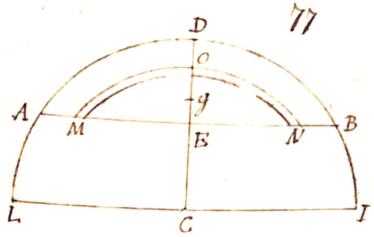


Sia ADB tal segmento, MON un segmento di corona elementare r il suo raggio, a il raggio del circolo, b la corda data DE. L'espressione della massa della corona sarà $f(r)dr\,arc\,MN$. Ora s'ha area

$MON = 2\,\text{arc}\left\{\cos = \frac{EC}{r}\right\} = 2\,\text{arc}\left\{\cos = \frac{a-6}{r}\right\}$. L'espressione della corona considerata nella massa sarà dunque $2rf(r)dr\,\text{arc}\left\{\cos = \frac{a-6}{r}\right\}$ e la massa totale del segmento

$$2\int_{a-6}^{a} r f(r)dr\,\text{arc}\left\{\cos = \frac{a-6}{r}\right\}$$

77



Ma il momento della corona sarà la sua massa per la distanza Cg del suo centro di gravità a C; la quale $Cg = r\frac{MEN}{MON}$. La massa espressa $= f(r)dr \times MON$, sarà il momento della corona $= r f(r)dr \times MEN$. Ora $MEN = 2\sqrt{(6+CE)(r-CE)} =$

$= 2\sqrt{r^2 - CE^2} = 2\sqrt{r^2 - (a-6)^2}$. Noi avremo dunque

$$x_1 = \frac{\int_{a-6}^{a} dr\, f(r)\, r\sqrt{r^2-(a-6)^2}}{\int_{a-6}^{a} r f(r)dr\,\text{arc}\left\{\cos = \frac{a-6}{r}\right\}}$$

E si effettuerà l'integrazione quando al simbolo $f(r)$ si sostituirà il valore di r in funzione di r. Noi siamo qui ricorsi all'uso di integrali semplici, in luogo che le formole generali hanno dato degli integrali doppi; e ciò perchè noi abbiamo tacitamente fatta un integrazione aggregando direttamente la massa o il centro di gravità di KLNPRSTV elemento del cilindro.

Veniamo finalmente al caso in cui la densità varii in tutti i sensi cioè sia $\delta = \psi(x,y,z)$. Se diamo a quest'equazione a δ un valore costante a, noi avremo $\psi(x,y,z) = a$. Ma troveremo che la densità è la stessa per una superficie, per ben infinite facendo variare δ per gradi a meno delle altre superficie per infinite

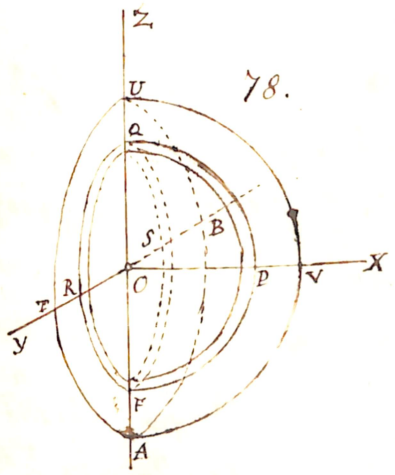
differenti dalla prima. Onde in questo caso il corpo può considerarsi formato di tanti involucri concentrici omogenei e infinitamente sottili. Immaginiamo scomposto il corpo per via di 3 sistemi di piani paralleli ai piani coordinati e infinitamente vicini in un infinità di parallelepipedi, il cui volume sarà $dx.dy.dz$. La massa di ciascuno di questi parallelepipedi sarà $\psi(x,y,z)\,dx.dy.dz$; e i momenti rispetto ai 3 piani coordinati $x\psi(x,y,z)\,dx.dy.dz$; $y\psi(x,y,z)\,dx.dy.dz$; $z\psi(x,y,z)\,dx.dy.dz$ poichè le coordinate del centro di gravità di ciascun parallelepipedo sono x,y,z. Ciò premesso per x_1 y_1 z_1 le seguenti espressioni.

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\int_a^b \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} \int_{z_1}^{z_2} x\psi(x,y,z)\,dz.dy.dx}{\int_a^b \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} \int_{z_1}^{z_2} \psi(x,y,z)\,dx.dy.dz.} \\
y_1 &= \frac{\int_a^b \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} \int_{z_1}^{z_2} y\psi(x,y,z)\,dz.dy.dx}{\int_a^b \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} \int_{z_1}^{z_2} \psi(x,y,z)\,dz.dy.dx} \\
z_1 &= \frac{\int_a^b \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} \int_{z_1}^{z_2} z\psi(x,y,z)\,dz.dy.dx.}{\int_a^b \int_{\varphi_1 x}^{\varphi_2 x} \int_{z_1}^{z_2} \psi(x,y,z)\,dz.dy.dx.}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Dove a, b, $\varphi_1 x$ $\varphi_2 x$, z_1 z_2 hanno le stesse significazioni che nelle formole dei casi precedenti.

Siano ad applicarsi queste formole al caso di un emisfero in cui la

densità sia proporzionale alla distanza di ciascun punto al centro della sfera. Se collochiamo il centro dell'emisfero all'origine, la base nel piano xy, l'asse dell'emisfero cadrà sull'asse x. Sia Δ la densità della superficie, R il raggio dell'emisfero; per uno strato qualunque RQBSP di raggio = x avremo d : Δ :: x : R onde d = x Δ/R. Se prendiamo per elemento la massa di questo strato compresa fra le sfere di raggio x e x+dx sarà il suo volume = 2π x² dx e la sua massa = 2Δπ/R x² dx. Il suo momento rispetto all'asse x sarà eguale a 2πΔ/R x² dx × ½ x, chè x/2 è appunto la distanza da O del centro della calotta

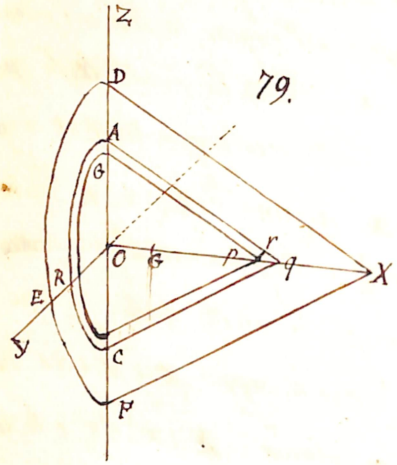


78.

emisferica KQBSP (Lez XIX). Noi avremo dunque

$$x_1 = \frac{\int_0^R \frac{2\pi\Delta}{R} x^2 dx \times \frac{1}{2} x}{\int_0^R \frac{2\pi\Delta}{R} x^2 dx} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^R x^4 dx}{\int_0^R x^3 dx} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{5} R^5}{\frac{1}{4} R^4} = \frac{2}{3} R$$

Sia il cono retto XEF formato da strati conici di uniforme densità le cui densità siano invariamente proporzionali ai raggi delle loro basi. Sup. avendo riferite a 3 assi in modo che la base sia sul piano yz, l'asse sull'asse delle x, consideriamo uno di questi strati conici AqCB. Se D sia la densità dello strato esterno, d quella del nostro strato noi avremo chiamando h l'altezza del cono, R il raggio della base. R : CA :: d : D. Onde



79.

$\delta = \frac{R.D}{OA}$. Ma i triangoli simili DXO Agc danno AO : X :: R : h epperò $OA = x\frac{R}{h}$, $\delta = \frac{R.D}{x}\frac{h}{R} = \frac{Dh}{x}$, per esprimere il volume dello strato conico ABcq sferrando da la sua superficie convessa è $\pi AC, Aq$ &c.

$Aq : DX :: Cq : OX : Aq = \frac{x\sqrt{h^2+R^2}}{h}$

sarà dunque la superficie convessa eguale a $\pi x \frac{R}{h}\frac{x\sqrt{h^2+R^2}}{h} = \pi x^2 \frac{R}{h}\sqrt{1+\frac{R^2}{h^2}}$

Il volume dello strato conico sarà eguale a questa superficie per la grossezza. Ora abbassando da p, pr ortogonale ad Aq, sarà rpq simile ad AOq e si avrà pr : pq :: AO : Aq :: DO : DX. Onde $pr = dx\frac{DC}{DX} = dx\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}$

Il volume dello strato sarà dunque $\pi x^2 \frac{R}{h^2}\sqrt{h^2+R^2} \times dx \frac{R}{\sqrt{h^2+R^2}} = \pi x^2 \frac{R^2}{h^2}dx$

La sua massa sarà $\pi x^2 \frac{R^2}{h^2}dx \times \frac{Dh}{x} = \pi x \frac{R^2 D}{h}dx$. Epoichè $OG = \frac{1}{3}x$ se G è centro della superficie conica ABCq il suo momento sarà $\frac{\pi DR^2}{3h}x^2dx$; onde

$$x_1 = \frac{\int_0^h \frac{\pi DR^2}{3h}x^2dx}{\int_0^h \frac{\pi DR^2}{h}x\,dx} = \frac{\frac{1}{3}\int_0^h x^2dx}{\int_0^h x\,dx} = \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{3}h^3}{\frac{1}{2}h^2} = \frac{2}{9}h$$

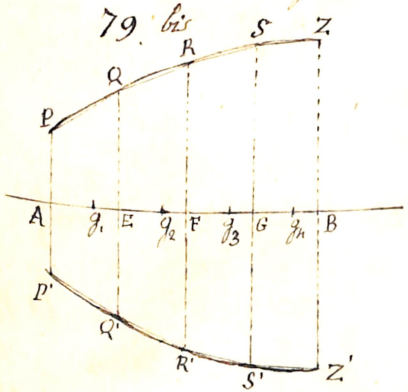
(Poisson 91)

LEZIONE XXIV.

Centri di gravità delle superficie piane terminate da linee curve, ovvero esprimibili con una equazione analitica o condecenti ad integrali non eseguibili. Formole delle quadrature paraboliche, e formola che dà l'ascissa del centro di gravità di una delle superficie piane suddette.

E' ora risoluto in tutta la sua generalità il problema di trovare il centro di gravità di una figura qualunque i cui contorni possono esprimersi con una eq. analitica. Ma succede spesso tal eq. analitica ovvero vi è o non si può trovare, od almeno si possa trovare condurre talvolta ad integrazioni non eseguibili in termine finito, ovvi è necessario avere delle regole onde poi quelli casi.

Per cominciare dalla più piana, supponiamo che si abbia la figura PP'Z'Z intorno ad un asse AB, e che l'eq. della curva PZ, che la limita da tutte le parti non si possa avere o non vogliasi fare uso, ella 1° metodo per arrivare al centro di gravità di questa figura, che supponiamo omogenea sarebbe quello di dividere AB in un certo N° di parti eguali e sufficientemente piccole affinchè gli archi PQ, QR, RS... intercetti fra le successive ordinate condotte pei punti di divisione si potessero considerare come non differenti molto dalle



loro corde. Allora tutti i seguenti $PP'Q'Q$, $QQ'R'R$, ... diventano trapezi ese
si divisa h la divisione $EA = EF = FG$ ... $y_1\ y_2\ y_3\ y_n$ ... le ordinate AE
EQ ... che si propone misurare sarà.

Trapezio $PP'Q'Q = h\,(y_1 + y_2)$; Trapezio $QQ'R'R = h\,(y_2 + y_3)$

Trapezio $RR'S'S = h\,(y_3 + y_n)$; ecc. e l'ultimo sarà $= h\,(y_n + y_{n+1})$

quando la AB sia divisa in n parti. onde l'area totale $PP'Z'Z$ sarà

$$A = h\,(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_n + \ldots + 2y_n + y_{n+1})$$

Ma se $y_1\ y_2\ y_3$ ... siano i centri di gravità dei singoli trapezi si avrà.

$$Ag_1 = \frac{h}{3}\,\frac{y_1 + 2y_2}{y_1 + y_2}\ ;\qquad Ag_2 = h + \frac{h}{3}\,\frac{y_2 + 2y_3}{y_2 + y_3}\ ;$$

$$Ag_3 = 2h + \frac{h}{3}\,\frac{y_3 + 2y_n}{y_3 + y_n}\ ;\qquad Ag_n = 3h + \frac{h}{3}\,\frac{y_n + 2y_5}{y_n + y_5}\ ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Ag_n = (n-1)h + \frac{h}{3}\,\frac{y_n + 2y_{n+1}}{y_n + y_{n+1}}\ .$$

Onde i singoli momenti dei trapezi si otterranno moltiplicando le loro aree
per queste rispettive distanze; e si avrà.

Momento del trapezio $PP'Q'Q = \frac{h^2}{3}(y_1 + 2y_2)$; Idem .... $QQ'R'R = \frac{h^2}{3}(4y_2 + 5y_3)$

Id. ..... $RR'S'S = \frac{h^2}{3}(7y_3 + 8y_n)$; Id. ..... $S'S Z'Z = \frac{h^2}{3}(10y_n + 11y_3)$

Momento del trapezio $\overset{\text{ennesimo}}{\ldots} = \frac{h^2}{3}\left[(3n-2)y_n + (3n-1)y_{n+1}\right]$

La somma di tutti questi momenti sarà.

$$\frac{h^2}{3}\left\{y_1 + 6y_2 + 12y_3 + 18y_n + \ldots + 6(n-1)y_n + (3n-1)y_{n+1}\right\}.$$

onde si avrà.

$$X_1 = \frac{h}{3}\,\frac{y_1 + 6y_2 + 12y_3 + 18y_n + \ldots + 6(n-1)y_n + (3n-1)y_{n+1}}{y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_n + \ldots + 2y_n + y_{n+1}} \qquad (1)$$

Questa sarebbe già un'approssimazione, ma molto maggiore si può ottenere col metodo delle quadrature parabolica di SIMSON.

Si consideri la curva PZ nel tratto di 2 archetti consecutivi, che supporremo sensibilmente coincidenti con un arco di parabola (il che segue sempre salvo alcune eccezioni che vedremo) che passi per i punti P, Q, R. e che abbia l'asse suo verticale; siccome l'eq. di una parabola a asse verticale è $y = a + bx + cx^2$, noi potremo sempre determinare i coefficienti a, b, c. in modo che passi per i punti P Q R. Difatti se si immagini in A l'origine delle coordinate le ascisse dei punti P, Q, R. saranno 0, h, 2h e le ordinate y_1 y_2 y_3: dovendo questi punti trovarsi nella parabola, soddisfaranno all'eq $y = a + bx + cx^2$, perciò si avranno le condizioni seguenti sostituendo in essa le coordinate dei punti P Q R. $y_1 = a$ $y_2 = a + bh + ch^2$ $y_3 = a + 2bh + 4ch^2$ Dalle quali si ricavano.

$$a = y_1 \; ; \; b = \frac{4y_2 + 3y_1 + y_3}{2h} \; ; \; c = \frac{y_3 + y_1 - 2y_2}{2h^2}$$

Cerchiamo ora l'ascissa del centro di gravità e l'area del segmento PAFR. nell'ipotesi che l'arco PQR sia un arco della parabola $y = a + bx + cx^2$, avremo

$$\int y\,dx = \int (a + bx + cx^2)\,dx = ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3}$$

$$\int xy\,dx = \int (a + bx + cx^2)\,x\,dx = a\frac{x^2}{2} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^4}{4} \; ; \text{ e fatti } x = 0 \text{ e } x = 2h$$

$$\int_0^{2h} y\,dx = 2ah + 2bh^2 + \frac{8}{3}ch^3 \; ; \; \int_0^{2h} xy\,dx = 2ah^2 + \frac{8}{3}bh^3 + 4ch^4.$$

Sostituiamo ora in queste eq. in luogo di a, b, c le loro espressioni di h, y_1 y_2, y_3 sopra scritte; avremo.

$$\int_0^{2h} y\,dx = \frac{h}{3}\left\{y_1 + 4y_2 + y_3\right\} \; ; \; \int_0^{2h} xy\,dx = \frac{h^2}{3}\left\{4y_2 + 2y_3\right\}$$

La prima di queste formole dà l'area del segmento PAFR nell'ipotesi che l'arco PQR sia parabolico; ripetendo le stesse ragionamenti pel segmento successivo RFBZ si ottiene egualmente $\frac{h}{3}\{y_3 + 4y_4 + y_5\}$ e così pei seguenti seguente, $\frac{h}{3}\{y_4 + 4y_5 + y_7\}$, e pel seguente n^{mo} se $2n$ sia il N^{o} pari delle parti in cui si è diviso AB, $\frac{h}{3}\{y_{2n-1} + 4y_{2n} + y_{2n+1}\}$. Onde facendo la somma di tutti questi segmenti si avrà l'area intera PABZ;

$$= \frac{h}{3}\{y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + 4y_6 + \dots + 4y_{2n} + y_{2n+1}\}$$

la quale è appunto la formola delle quadrature parabole di Thomas Simpson.

La 2ª formola è il momento di rettangolo dei segmenti PAFR, RFBZ... ecc. Si avrà quindi per la distanza dei loro centri di gravità dalle ordinate, da cui cominciano, $x_1' = h\frac{4y_2 + 2y_3}{y_1 + 4y_2 + y_3}$; $x_1'' = h\frac{4y_4 + 2y_5}{y_3 + 4y_4 + y_5}$;

$x_1''' = h\frac{4y_6 + 2y_7}{y_5 + 4y_6 + y_7}$; ..... ecc. Onde si distingue Ag_1' Ag_2' Ag_3' ecc. avremo

$Ag_1' = h\frac{4y_2 + 2y_3}{y_1 + 4y_2 + y_3}$; $Ag_2' = 2h + h\frac{4y_4 + 2y_5}{y_3 + 4y_4 + y_5}$; $Ag_3' = 4h + h\frac{4y_6 + 2y_7}{y_5 + 4y_6 + y_7}$.

..... $Ag_n' = 2(n-1)h + h\frac{4y_{2n} + 2y_{2n+1}}{y_{2n-1} + 4y_{2n} + y_{2n+1}}$

Ove siano g_1' g_2' g_3' ..... i centri di gravità dei segmenti corrispondenti fra la 1ª e la 3ª, fra la 3ª e la 5ª, fra la 5ª e la 7ª ordinata .... Si può ricondurre i momenti di questi segmenti: e si ha.

Momento del 1° seg. PAFR $= \frac{h^2}{3}(4y_2 + 2y_3)$; Momento del 2° seg. RFBZ $= \frac{h^2}{3}(2y_3 + 4y_4 + y_5)$

..... del 3° seg. ..... $= \frac{h^2}{3}(4y_5 + 4.5y_6 + 6y_7)$; ..... del n^{mo} seg. ..... $= \frac{h^2}{3}(2y_{2n-1} + 4n.7y_{2n} + 8y_{2n+1})$

Momento del n^{mo} seg. $= \frac{h^2}{3}\{2(n-1)y_{2n-1} + h(2n-1)y_{2n} + 2ny_{2n+1}\}$

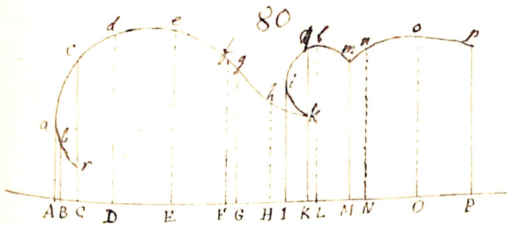
Onde facendo la somma si ha $\frac{h^2}{3}\{1.4y_2 + 2.2y_3 + 3.4y_4 + 2.4y_5 + 4.4y_6 + 2.2y_7 + \dots\}$

e quindi in fine l'ordinata del centro di gravità della superficie totale.

$$X_1 = \frac{0.y_1 + 1.4y_2 + 2.2y_3 + 3.4y_4 + 4.2y_5 + 5.4y_6 + \dots + (n-1)4y_{2n-1} + 4(2n-1)y_n + 2ny_{2n+1}}{y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + 4y_6 + \dots + 2y_{2n-1} + 4y_n + y_{n+1}}$$

Dove il numeratore non è altro che la serie dei termini del denominatore moltiplicata per la serie dei numeri naturali.

È da notarsi che nell'usar questo metodo è da prendersi questa precauzione di non avere nella curva PZ dei punti singolari. Supponiamo che si dovesse per es. quadrare la curva rpl che ha un punto di inflessione in g, 2 punti di regresso in m, k, e 2 punti q_1 q_2 in cui la tang. sia verticale. È evidente che non si può cominciare come si è fatto per la PZ la serie in parti eguali nei punti D E F H .... e determinare tante ordinate, gli archi fh, hkil, lmn non potremmo mai confondere sensibilmente con una parabola passante per tre punti d'inflessione, né di regresso. E neppure gli archi ae, kiq, potremmo confondere con un arco di parabola il cui asse fosse parallelo a quello della curva non più non tangente curva una secante nei punti a ed i. In questo caso adunque per non commettere errori, abbiamo fatto dai punti p, m, k, q, e le ordinate si calcolano separatamente i centri e le aree dei segmenti pMm, MmqK, KkqG, ...; giunti poi ai punti dintorni dei punti q ed m conviene moltiplicare il diviso e quadrato per tre volte la parola di cui sopra come si è fatto nell'altro metodo. Delle aree e dei centri parziali risulterà poi l'area e il centro totale.

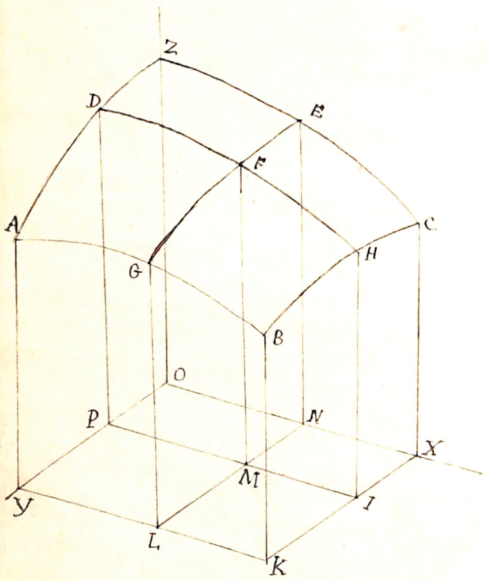


(Vedi articoli 87 - 88, 91 - 94)

LEZIONE XXV.

Esposizione delle formole di Bezout e di Simson colle loro dimostrazioni – Espressioni del volume e dell'ascissa del centro di gravità di un solido prismatico quadrangolare terminato da una superficie qualunque – Metodo per avere colle stesse formole tutte le coordinate del centro di gravità tanto delle aree piane quanto dei solidi.

I due metodi d'approssimazione esposti nella precedente lezione per trovare il valore e il centro di gravità di una area qualunque dei quali il 1° è dovuto a Bezout (geometra francese nato nel 1730, morto nel 1783) il 2° a Simson professore egiziano applicarli alle 3 dimensioni. Noi non aggiungeremo che poco all'ultimo grado del metodo lo stesso per l'uno e per l'altro.



Sia a cercare primieramente il volume del corpo VOXKABCZ di forma prismatica a base rettangolare limitato lateralmente da pareti verticali, e superiormente dalla superficie curva ABCZ di cui non si abbia l'eq.e ma si proponga fare uso. Se noi prendiamo per assi i 3 spigoli OX, OY, OZ. e condurremo una sezione qualunque in esso PIHD parallela al

piano xz e divisa la base PI in un n^{to} $2n$ di parti eguali, chiameremo h ciascuna di queste suddivisioni $z_1 z_2 z_3 \ldots$ le coordinate corrispondenti della curva DH; noi avremo dalla 2da precedente

$$\text{Area } DHPI = \frac{h}{3}\left\{z_1 + 4z_2 + 2z_3 + 4z_4 + \ldots + 2z_{2n-1} + 4z_{2n} + z_{2n+1}\right\}$$

Se parallelamente a questa regione ne condurremo un'altra parallela, dalla 1^a distante della quantità infinitamente piccola dy, l'elemento del solido sarà eguale a dy moltiplicato per la regione $DHPI$; chiamando dV questo elemento,

$$dV = \frac{h}{3}\left\{z_1 dy + 4z_2 dy + 2z_3 dy + 4z_4 dy + \ldots + 2z_{2n-1} dy + 4z_{2n} dy + z_{2n+1} dy\right\}$$

Onde il volume totale si otterrà integrando fra i limiti $y=0$ $y=cy$;

$$V = \frac{h}{3}\left\{\int_0^{cy} z_1 dy + 4\int_0^{cy} z_2 dy + 2\int_0^{cy} z_3 dy + \ldots + 4\int_0^{cy} z_{2n-1} dy + \int_0^{cy} z_{2n+1} dy\right\}$$

Sia ora A punto M la K^{ma} divisione di PI, eppero' $MP = z_K$. Se noi conduciamo per M una sezione $EGLN$ parallela al piano zy, e immaginiamo che l'eq.ne della curva GFE riferita agli assi $NL = y$, $NE = z_K$, siccome se si opera la divisione in $2n$ parti eguali di tutte le basi delle sezioni parallele a $GHPI$, esi diranno le ordinate corrispondenti, tutte le ordinate z_K saranno contenute nella sezione $EGLN$, segue che $\int_0^{cy} z_K dy$ rappresenterà l'area della sezione $EGLN$, e così pure $\int_0^{cy} z_v dy$ rappresenterà l'area della sezione parallela al piano xy fatta nel solido per punti v^{esimi} di divisione e per tutte le ordinate segnate v delle sezioni parallele a $DPHI$. Chiamiamo dunque S_1 la regione del solido fatta per tutte le ordinate z, e in generale S_n la regione del solido parallela al piano zy che passa per le ordinate z_n fatta.

$$V = \frac{h}{3}\left\{S_1 + 4S_2 + 2S_3 + 4S_4 + \ldots + 2S_{2n-1} + 4S_{2n} + S_{2n+1}\right\}.$$

dove S_1 S_{2n+1} altro non sono che le parti ZAYC, BCXK.

Il momento dell'elemento che ha per base la regione DHPI è evidentemente eguale a DHPI × X × dy, essendo X l'ascissa del centro di gravità della regione DHPI. Ora DHPI × x altro non è che il momento dell'area DHPI, la cui ascissa per li $z_1, z_2, z_3 \ldots$ si ricava espressa dalla [illegible] antecedente.

$$\frac{h^2}{3}\left\{0.z_1 + 1.s_1 z_2 + 2.2 z_3 + 3.s_1 z_4 + \ldots + (2n-1)s_1 z_{2n} + 2n z_{2n+1}\right\}.$$

Il momento dell'elemento sarà questa quantità moltiplicata per dy; la somma dei momenti sarà ottenuta integrando fra i limiti 0 e OY rispetto a y: chiamando Σ questa somma,

$$\Sigma = \frac{h^2}{3}\left\{0\int_0^{0y} z_1\,dy + 1.s_1\int_0^{0y} z_2\,dy + 2.2\int_0^{0y} z_3\,dy + \ldots + (2n-1)s_1\int_0^{0y} z_{2n}\,dy + 2n\int_0^{0y} z_{2n+1}\,dy\right\}$$

ed anche colle notazioni precedenti,

$$\Sigma = \frac{h^2}{3}\left\{0S_1 + 1.s_1 S_2 + 2.2 S_3 + 3.s_1 S_4 + \ldots + (2n-1)s_1 S_{2n} + 2n S_{2n+1}\right\}$$

onde l'ascissa del centro di gravità $= \frac{\Sigma}{V}$ sarà

$$X_1 = h\,\frac{0.S_1 + 1.s_1 S_2 + 2.2 S_3 + 3.s_1 S_4 + \ldots + (2n-1)s_1 S_{2n} + 2n S_{2n+1}}{S_1 + s_1 S_2 + 2.S_3 + s_1 S_4 + \ldots + s_1 S_{2n} + S_{2n+1}}$$

È visibile che è la stessa che l'espressione dell'ascissa del centro di gravità d'un segmento di curva; ma qui alle ordinate $y_1, y_2 \ldots$ ecc. sono sostituite le regioni $S_1, S_2 \ldots$ ecc. E così verificato che procedendo nello stesso modo e adottando per le aree la formola di Bessel invece di quella di Simpson si sarebbe ottenuto per risultato

$$X_1 = \frac{h}{3}\left\{\frac{S_1 + 3.2.S_2 + 2.3.2.S_3 + 3.3.2 S_4 + 4.3.S_5 + \ldots + (2n-1)S_{2n+1}}{S_1 + 2S_2 + 2.S_3 + 2S_4 + 2S_5 + \ldots 2S_n + S_{n+1}}\right\}$$

Nella quale espressione il denominatore $\frac{h}{2}(S_1 + 2S_2 + 2S_3 + \ldots)$ equivale approssima-

-tivamente il volume del solido. Per determinare approssimativamente il centro di gravità si fanno prima le sezioni S_1 S_2 ... ortogonali all'asse x, poi all'asse y e all'asse z; così completamente si determina la distanza del punto cercato dai 3 piani coordinati.

Lo dia poi pure ancora per una area piana non simmetrica rispetto ad un asse, guidando per esso x successivamente 2 rette, di cui una sia parallela, l'altra perpendicolare alla linea retta che divide a metà il segmento dell'area = o più generalmente, sebbene meno facilmente, 2 rette qualunque condotte nel piano dell'area.

(Vedi Novi 89-90, 93-95)

LEZIONE XXVI.

Regole centrobariche – Teoremi del padre GULDIN intorno alle superficie e ai solidi di rivoluzione – Sua applicazione alla ricerca della superficie del toro, della scozia, e del fuso – Avvertenza circa l'uso di questo teorema. – Estensione del medesimo e sue applicazioni alla ricerca di varie aree generate da una retta percorrente col suo punto di mezzo una curva qualunque.

II. Centro di gravità è di grande ajuto per la determinazione della superficie e dei volumi ~~dei solidi~~ di rivoluzione quando si abbia riguardo ad un teorema scoperto dal secolo XVI. dal padre Gesuita GULDIN, del quale però già si trovava qualche indizio nelle collezioni matematiche di PAPPO, geometra del V secolo.

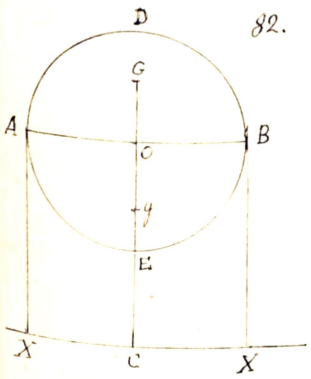
Noi abbiamo trovato che l'ordinata del centro di gravità della lunghezza di una curva piana era $(\text{Ord } xx)\ \frac{\int y ds}{s}$. Se si immagini che tal curva giri intorno all'asse x, il suo centro di gravità descriverà la circonferenza di raggio $\frac{\int y ds}{s}$ che sarà $2\pi \frac{\int y ds}{s} = q$. Sarà così $qs = 2\pi \int y ds$, il secondo membro è eguale alla superficie generata dalla curva nella sua rivoluzione intorno all'asse x: se si chiami S questa superficie avremo $S = qs$: cioè l'area della superficie generata da una curva è eguale al prodotto della lunghezza di questa curva moltiplicata pel viaggio q del suo centro di gravità.

Similmente si ha $(\text{Ord } xx)$ che l'ordinata del centro di gravità di un'area $y = f(x)$ era $\frac{1}{2} \frac{\int y^2 dx}{\int y dx}$; e se chiamiri A l'area della curva $\frac{1}{2} \frac{\int y^2 dx}{A}$,

Se si fa girare intorno all'asse x l'area A, il centro di gravità descriverà la periferia. $q = \pi \frac{\int y^2 dx}{A}$, di qui $qA = \pi \int y^2 dx = V$. V essendo il volume generato dall'area A nella sua rivoluzione. Questo volume è dunque eguale all'area della curva generatrice moltiplicata pel viaggio del suo centro di gravità.

Dunque quando una linea o un area piana girano intorno ad un asse contenuto nel loro piano, la superficie o il volume generato è eguale alla lunghezza della linea, o dell'area della superficie generatrice pel viaggio del suo centro di gravità. Questo è il teorema di Pappo e di Guldin.

Gir. il circolo AEBD intorno all'asse XX; la semiperiferia AED genera ta girante mobile una superficie convesso-convessa detta dagli arbitetti toro, e la semicirconferenza AEB genererà una superficie convesso-concava detta dai medesimi conoscia. Si domanda l'area dell'una e dell'altra superficie. Sia OC = a

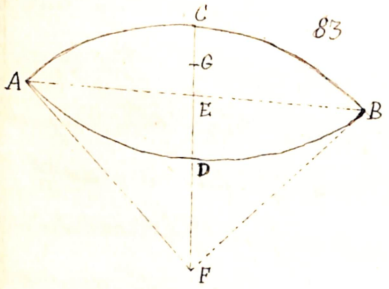


82.

OB = r; se G è il centro di Gravità della semiperiferia ADB; avremo $OG = \frac{2r}{\pi}$; onde $GC = a + \frac{2r}{\pi}$ e il viaggio di G sarà $2\pi\left\{a + \frac{2r}{\pi}\right\} = 2\pi a + 4r$. Moltiplicando per ADB $= \pi r$ sarà la superficie cercata del toro $= 2\pi^2 ar + 4\pi r^2$. È dunque eguale ad un rettangolo di lato eguale alla periferia di raggio OC e ad ADB; più un circolo di raggio r. Nello stesso modo si troverebbe per la superficie della Scozia $2\pi^2 ar + 4\pi r^2$; e la loro somma o la superficie totale del solido annullare sarebbe $4\pi^2 ar$; cioè il prodotto del cerchio O per la periferia del circolo AEDB.

Quando si volesse il volume generato dal semicerchio ADB, basterebbe osservare che il suo centro di gravità G dividendo da O di $\frac{4r}{3\pi}$; si avrà $CG = a + \frac{4r}{3\pi}$, ed il raggio $2\pi a + \frac{8}{3}r$. Moltiplicando per $\frac{\pi r^2}{2}$, che è l'area ACBD si ha pel volume $\pi^2 a r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 \times \pi a + \frac{4}{3}\pi r^3$, è dunque eguale all'area del semicerchio pel raggio del centro O, più una sfera di raggio r. Che la seggia sarebbe $\pi r^2 \times \pi a - \frac{4}{3}\pi r^3$, e il volume totale del solido annulato sarebbe ciò eguale $2\pi a \times \pi r^2$; che è il raggio del centro di gravità del circolo generatore O per l'area del medesimo.

Sia il segmento circolare ACB intorno alla sua corda AB, esso genererà un fuso, del quale si ricerca la superficie del volume. Sia R il raggio FB del circolo cui appartiene il segmento, c la corda AB, s la saetta EC. Il centro G di gravità dell'arco ACB dunque GE = GF − FE. Ora $GF = \frac{rc}{\alpha}$, chiamando α l'arco, FE = r − s; sarà $GE = \frac{rc}{\alpha} - r + s$. Onde risulta il raggio $2\pi\left\{\frac{rc}{\alpha} - r + s\right\}$ e quindi la superficie del



83

fuso $= 2\pi\alpha\left(\frac{rc}{\alpha} - r + s\right) = 2\pi rc - 2\pi r\alpha + 2\pi s\alpha = 2\pi r(c - \alpha) + 2\pi s\alpha = 2\pi s\alpha - 2\pi r(\alpha - c)$

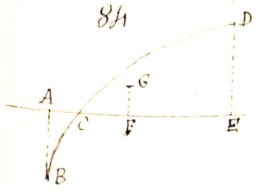
È dunque eguale alla superficie curva di un cilindro di raggio EC e d'altezza eguale all'arco; meno quella di un altro cilindro che ha per raggio AF e per altezza la differenza tra l'arco ACB e la corda AB.

Per aver il volume del fuso osserviamo che G essendo il centro di gravità del segmento si ha $FG = \frac{c^3}{12s}$, se sia S l'area del segmento. Onde $GE = \frac{c^3}{12s} - r + s$.

il raggio sarà $2\pi\left(\frac{c^3}{12S} - r + s\right)$ e il volume $2\pi S\left(\frac{c^3}{12S} - r + s\right) = \frac{\pi c^3}{6} - 2\pi Sr + 2\pi Ss$.

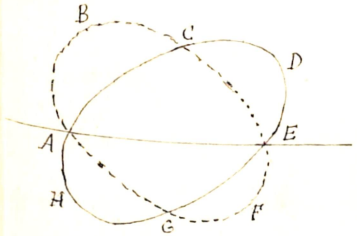
Ora si ha $S = \frac{cr}{2} - \frac{c}{2}\cdot EF = \frac{cr}{2} - \frac{cr}{2} + \frac{cs}{2}$. Sostituendo il volume diventa $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^3 + \pi s\hat{c} - \pi r^2(r-c) - \pi rs(2c-r)$: che è la sfera di raggio EB, più il cilindro di raggio EC e altezza AB meno il cilindro che ha per base l'eclisse di semiassi FB e EC e per altezza $2AB - ACB$. Nel caso di $c = 2r$, $s = r$, $\hat{c} = \pi r$ l'espressione si riduce a $\frac{4}{3}\pi r^3$: perchè allora il fuso diventa una sfera.

Nell'applicazione pratica della regola di Pappo, è da notarsi che se della curva BD che genera la superficie che si vuol misurare parte è sotto l'asse AE. di rivoluzione si avrà $GF = \frac{\int_{AB}^{DE} y\,ds}{\int_{AB}^{DE} ds} = \frac{\int_0^{DE} y\,ds - \int_0^{AB} y\,ds}{\int_0^{DE} ds - \int_0^{AB} ds}$; Perciocchè

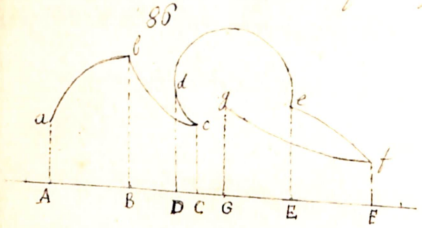


$S \times 2\pi GF =$ superficie di rivoluzione $= 2\pi\int_0^{DE} y\,ds - 2\pi\int_0^{AB} y\,ds$.

Siccome $2\pi\int_0^{DE} y\,ds$ è la superficie generata dalla parte CD, e $2\pi\int_0^{AB} y\,ds$ è la superficie generata dalla parte CB la regola Baldiniana darà in questo caso la differenza delle 2 superficie. Se si volesse la somma delle medesime bisognerebbe calcolarne l'area separatamente. La stessa osservazione si può fare riguardo al volume generato dall'area ADG. Laonde la regola dà il volume generato dall'area ADE, meno quello generato da ABE e che è il volume generato da EDC meno quello generato da ABC. Se si vuole il volume generato da ACE = AGE basta da quello generato da ADE sottrarre quello che si genera da CDE. Finalmente se si vuole il volume che



materialmente generebbe HD, e che è lo stesso che quello generato da ABCDE = AHCFE, togliendo a quello generato da ADE aggiungere quello generato dal segmento circolare ABC. Ciò si abbiano la somma di più archi consecutivi ab, bc, cd, ef, fg... la somma delle superficie da quelli generate sarà sempre eguale alla loro somma

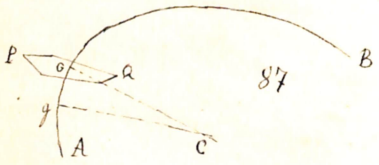


delle lunghezze pel cammino del centro comune di gravità. Cioè il momento del perimetro intero P se s dinotiamo Y_1 Y_2 le coordinate del 1°, 2°, 3°... arco sarà

$$Y_2 \times P = \int y_1 ds + \int y_2 ds + \int y_3 ds + \ldots$$

prendendo gli integrali fra i limiti convenienti onde $2\pi Y_1 \times P = 2\pi \int y_1 ds + 2\pi \int y_2 ds + 2\pi \int y_3 ds + \ldots = S_1 + S_2 + S_3 \ldots$ Se siano S_1 S_2 S_3... le superficie generate dal 1° 2° 3° 4°... arco. Lo stesso ha ancora luogo quando alcuni degli archi avesse un momento negativo; si avrebbe allora la somma algebrica delle superficie considerando come negative quelle generate da archi di momento negativo

Similmente il solido generato dalla somma algebrica di più aree è eguale a questa somma pel cammino del centro suo di gravità. Ecco il modo di dimostrare nello stesso modo che per le superficie.

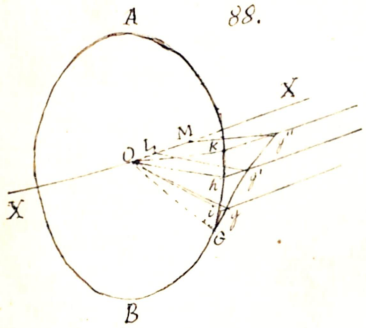


Il teorema di Pappo per ciò che riguarda i volumi però essere enunciato esattamente così: Il solido sia lo curva qualunque AGB piana o sghemba; dico che si l'area PQ la percorre col suo centro di gravità tenendosi ad

sia sempre normale, il volume generato dalla PQ è ancora eguale a quest'area pel raggio AB del suo centro di gravità. Difatti siano 2 posizioni G,g infinitamente vicine del centro di gravità; l'arcatello Gg potrà considerarsi come un arco di circolo avente suo centro C sul piano osculatore della curva. Epperò per lo spazio Gg l'area muovendosi per un arco di circolo intorno ad una asse perpendicolare in C al piano osculatore, il volume generato nel passare da G in g sarà eguale all'area pel raggio Gg del centro di gravità. Ricorrerà questo ragionamento si può ripetere per tutti gli archi in cui si può decomporre la curva segue la realtà della nostra proposizione.

Supponiamo che l'area il cui centro di gravità è G venga di descrivere intorno all'asse XX un circolo AB col suo centro, descriva una curva qualunque Gg" con tale condizione però che il suo primi passi sempre per XX e che la distanze del centro di gravità da quest'asse come GO, g'L, g"M. siano eguali tutte fra loro nelle successive posizioni; comunque si rivolga l'area sul suo centro di gravità e qualunque sia la curva che questa descriva sul cilindro di asse XX e base AB. Il volume generato sarà ancora eguale all'area generatrice per la proiezione GK del viaggio Gg" del centro di gravità sul piano AB ortogonale a XX.

88.



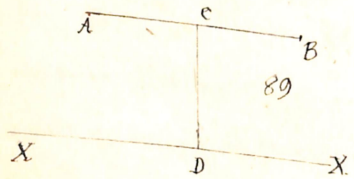
Considerando difatti il centro di gravità in 2 posizioni successive Gg, il solido generato in questo mezzo potrà considerarsi come avente per Gg per asse obliquo.

e poteri scomporsi in una infinità di piccoli prismi per via di piani paralleli per XX di cui le basi sieno eguali all'area generatrice e la somma delle altezze medie sia GI ortogonale a tutte le loro basi. Il volume dell'elemento sarà dunque GI x regione del solido generato, x area generatrice. Similmente il volume del solido generato nel passare da g in g' sarà, area della generatrice x th. Finora la somma si avrà pel solido generato nel passaggio da G in g", l'area della generatrice per la proiezione GK del cammino Gg" del centro di gravità.

Generalizzando si conclude; che se un area piana si muova nello spazio in modo che il suo piano si conservi normale costantemente ad una curva qualunque e che il suo centro di gravità si projetti nel piano osculatore (corrispondente al piano normale) nel punto di osculazione il volume generato è eguale alla lunghezza della curva per l'area generatrice.

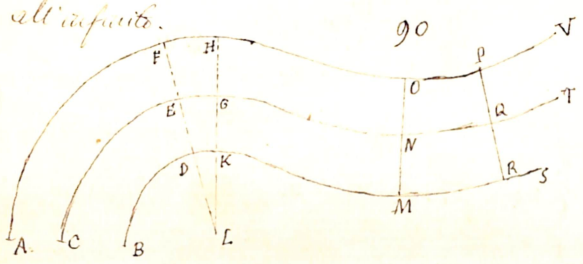
E se un area piana si muove nello spazio in modo da conservarsi in un piano ortogonale ad un altro piano A, qualunque ne pel resto il suo movimento, il solido generato è eguale all'area moltiplicata per la proiezione nel piano A del cammino del centro di gravità.

I teoremi precedenti non possono estendersi alle superficie generate dalle curve nella loro rivoluzione attorno ad un asse. Infatti le aree generate, se si muovono in qualunque senso la generatrice, anche conservando la stessa posizione rispetto all'asse il loro centro di gravità, possono avvicinarsi all'infinito. Così per es se la retta AB

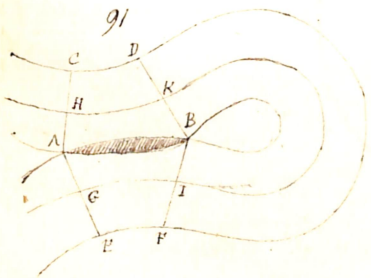


gira intorno all'asse XX conservandosi ad ogni

parallela genererà una superficie cilindrica eguale a $2\pi CD \times AB$. Ma se mentre il punto C gira descrivendo un circolo di raggio CD, la AB si rivolga intorno a C nel piano che passa per C e l'asse, genererà un elleroide sghembo piegato a forma d'anello circolare di raggio medio = CD. Il quale elleroide potendo avere tanto maggior numero di giri, quanto più velocemente si fa girare AB intorno a C di quel che C giri intorno ad XX la superficie generata dal moto di AB potrà crescere all'infinito.

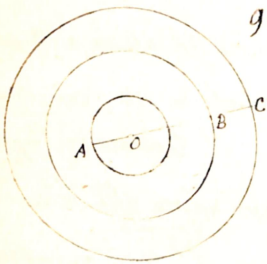


Il teorema di Pappo serve ancora alla determinazione di tutte le superficie generate da una retta RP di lunghezza definita che scorre col suo punto di mezzo Q su una curva TNEC mantenendosi ad essa costantemente normale. È evidente da considerare due posizioni successive della curva FD, HK. L'area FHKD si potrà considerare come un trapezio di altezza DE ed in cui la semisomma delle basi sarebbe evidentemente EG, l'area dell'elemento FHKD sarebbe dunque $GE \times DF$. L'area totale sarà dunque DF pel tragitto TC del centro di gravità della retta o per la curva TC.



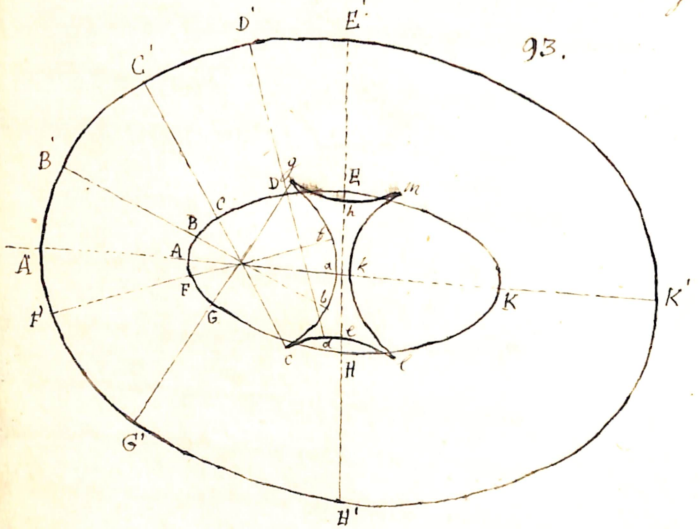
In questa valutazione è talora da aver riguardo alla compenetrazione vicendevole di più parti dell'area generata; come per es nella Fig 91 il segmento AB essendo generato 2 volte, bisognerà calcolarlo una sol volta.

e quindi sottrarlo dal prodotto dato dalla regola. Questo avviene appunto dalla curva direttrice in 2 parti si avvicina tanto a se stesso che la distanza tra quelle è minore della retta generatrice. Una altra avvertenza è da farsi quando il raggio di curvatura della direttrice è minore della retta della generatrice. Così per es. sia il circolo OB la direttrice, la ABC tale che BA = BC sia maggiore di OB. Nella rotazione la porzione OC della AC genera il circolo OC, la porzione OA un altro circolo AC, per cui la sua superficie generata, dal prodotto dato dalla regola Guldiniana $AC \times 2\pi OB$ bisognerà sottrarne πAO^2; onde sarà la sua area $\pi(2AC \times OB - \overline{AO}^2)$; se si ripete che $AC = AB - OB$ che $AC = 2AB$ si avrà $\pi\{4AB \times OB - (AB - OB)^2\} = \pi(AB - OB)^2 = \pi OC^2$.



92

Sia l'ellissi AKHE una direttrice e sia E'E la generatrice. Movendosi E verso C il punto esterno E' descriverà la curva E'C ed il punto interno la curva CC. Ma quando E sarà nel punto C dell'ellisse il raggio di curvatura è eguale a Ce, il punto esterno con



93.

continuerà a descrivere la curva E'A'H'K' di figura eguale, equidistante in ogni punto dall'elisse, mentre il punto c con moto retrogrado prenderà a descrivere l'arco cg uguale al punto E cioè l'arco CG. L'asse E'a da G in H il punto g descriverà un arco gh eguale ad EC. E così per l'altra metà dell'elisse. Onde vedesi che la parte interna della generatrice rasa 2 volte nella superficie gelata. Per avere con esso generato dalla superficie esterna della regola bisognerà togliere la spira in rilievo gelata. Ciò accade ogni volta che in qualche luogo della curva la curvità della generatrice è maggiore del raggio di curvatura della curva. Quel punto della curva descritta in cui il raggio di curvatura è eguale alla curvità della generatrice serve per la curva interna dei punti di regresso.

Se una retta percorre col suo mezzo la periferia di un circolo trovandosi inclinata d'un angolo costante al piano del circolo e diretta secondo un punto posto sull'asse di questo circolo, genererà un tronco di cono retto circolare, pel quale si verificherà ancora il teorema di Pappo. L'esempio o proposizione precedente della retta la porzione generata è un trapezio la cui area è espressa dal prodotto del perimetro descritto dal centro di gravità per la lunghezza della retta. Lo stesso dicasi di una retta che percorrendo col suo mezzo una curva piana qualunque si tenga sempre nel piano normale alla curva, e faccia un angolo costante col piano della curva direttrice. L'esempio in questo caso l'elemento della superficie generata sarà un elemento di superficie conica di cui il raggio della base sarà il raggio di curvatura della direttrice, e il lato sarà inclinato all'asse di un angolo costante. Per quest'elemento verificandosi il teorema di

Piano si verifichera per tutti la superficie. Siccome ne punto cuspidale i rami osculatori alla superficie generata sono piani; questa sarà una superficie sviluppabile, perchè ogni suo elemento è sviluppabile, e cio è manifesto di sopra di questa superficie sarà il luogo geometrico di tutte le rette dei rami osculatori.

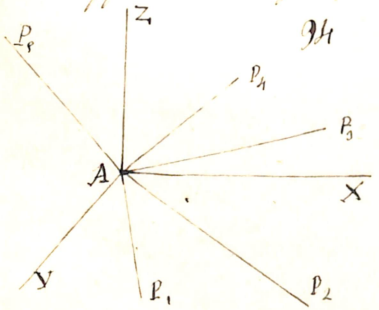
Nel caso in cui lo spigolo di regresso si riduce ad un punto sia i rami del corso

LEZIONE XXVII

Equazioni d'equilibrio d'un corpo libero – Teorema di LEIBNITZ – Teorema di ROBERVAL – Applicazioni loro alla risoluzione d'una questione risolubile teorema da se notare.

NOI non abbiamo finora considerate che le forze nella loro grandezza ed abbiamo esaminato i metodi coi quali si può procedere alla riduzione degli effetti di più forze applicate in un punto o parallele. Non abbiamo ancora fatta ricerca di equilibrio e di moto che più d'uno; consideriamo ora i corpi nel 1° di questi stati, ed entriamo così in quella della Statica propriamente detta.

Il caso più semplice d'equilibrio che si possa considerare è quello d'un punto al quale siano applicate più forze aventi in generale una direzione. È evidente e s'è già fatto vedere che in questo caso ciascuna forza deve essere eguale e contraria alla risultante di tutte le altre. Volendo esprimere analiticamente questo fatto rappresentiamo con $P_1\ P_2\ P_3 \ldots$ date più forze applicate al punto A e rappresentate in grandezza e direzione dalle $AP_1\ AP_2\ AP_3 \ldots$ Facciamo poi che la forza P_1 è precisamente eguale alla risultante di tutte le altre. Se sia



$$X = P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + P_n\cos\alpha + \ldots \ldots$$

$$Y = P_2\cos\beta_2 + P_3\cos\beta_3 + P_n\cos\beta_n + \ldots \ldots$$

$$Z = P_2\cos\gamma_2 + P_3\cos\gamma_3 + P_n\cos\gamma_n + \ldots \ldots$$

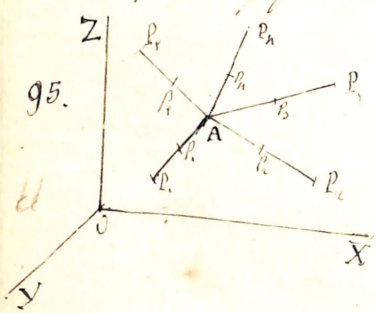
(dove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$ sono gli angoli fatti dalle forze $P_1 P_2 \dots$ coi rispettivi assi) dovrà essere dapprima $P_1 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$. Gli angoli della risultante di tutte le forze meno P_1 cogli assi, che designeremo con λ, μ, ν dovranno essere rispettivamente supplementari degli angoli $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; perchè P_1 e quella risultante sono opposte; sarà dunque $\cos\lambda = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} = \frac{X}{P_1} = -\cos\alpha_1$; $\cos\mu = \frac{Y}{P_1} = -\cos\beta_1$, $\cos\nu = \frac{Z}{P_1} = -\cos\gamma_1$ donde si ha $X + P_1\cos\alpha_1 = 0$ $Y + P_1\cos\beta_1 = 0$ $Z + P_1\cos\gamma_1 = 0$ ovvero.

$$(1)\quad \begin{cases} P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \dots = \Sigma P_i\cos\alpha = 0 \\ P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + P_3\cos\beta_3 + \dots = \Sigma P\cos\beta = 0 \\ P_1\cos\gamma_1 + P_2\cos\gamma_2 + P_3\cos\gamma_3 + \dots = \Sigma P\cos\gamma = 0 \end{cases}$$

Tali sono le eq.ni d'equilibrio del punto A. Alle quali si può pervenire immediatamente osservando che la risultante di tutte le forze $P_1 P_2 \dots$ dovendo esser zero, e tal risultante essendo espressa per $\sqrt{(\Sigma P\cos\alpha)^2 + (\Sigma P\cos\beta)^2 + (\Sigma P\cos\gamma)^2}$ si avrà $(\Sigma P\cos\alpha)^2 + (\Sigma P\cos\beta)^2 + (\Sigma P\cos\gamma)^2 = 0$

La quale eq.ne non può sussistere per valori reali delle forze se non altrimenti separatamente $\Sigma P\cos\alpha = 0$ $\Sigma P\cos\beta = 0$ $\Sigma P\cos\gamma = 0$ locchè se la risultante di un parallelepipedo rettangolo è zero forza è che tutte le componenti siano zero.

95.



Il Riferiamoci ora al sistema di forze applicate ad A ad un sistema qualunque XYZ di coordinate rettangole, siano $\xi\ \eta\ \zeta$ le coordinate del punto A, e supponiamo che le rette AP_1, AP_2 ... rappresentino le

grandezza e direzione le $P_1\ P_2 \dots$ siano $x_1\ x_2\ x_3 \dots\ y_1\ y_2\ y_3 \dots\ z_1\ z_2\ z_3 \dots$ le coordinate dei punti $P_1\ P_2\ P_3 \dots$ le componenti delle forze secondo gli assi saranno

Per la P_1 $\begin{cases} x_1 - \xi \\ y_1 - \upsilon \\ z_1 - \zeta \end{cases}$; per la P_2 $\begin{cases} x_2 - \xi \\ y_2 - \upsilon \\ z_2 - \zeta \end{cases}$; per la P_3 $\begin{cases} x_3 - \xi \\ y_3 - \upsilon \\ z_3 - \zeta \end{cases}$;

Se su esso le forze applicate in A_1 noi avremo dalle eq^{ni} (1) esprimenti le condizioni d'equilibrio

$$x_1 - \xi + x_2 - \xi + x_3 - \xi + \dots + x_n - \xi = 0$$

$$y_1 - \upsilon + y_2 - \upsilon + y_3 - \upsilon + \dots + y_n - \upsilon = 0$$

$$z_1 - \xi + z_2 - \xi + z_3 - \xi + \dots + z_n - \zeta = 0$$

le quali si convertono in

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n\xi \ ; \quad y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n = n\upsilon ,$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n = n\zeta .$$

Moltiplicando ambi i membri delle 3 eq^{ni} per Q, esprimendo Q un peso qualunque, sarà risolvendole rispetto a ξ, υ, ζ.

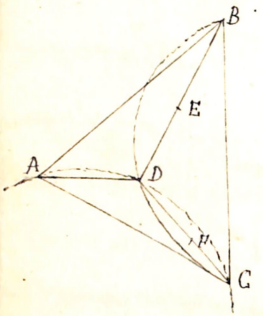
$$\xi = \frac{Qx_1 + Qx^2 + Qx^3 + \dots + Qx_n}{nQ} \ ; \quad \upsilon = \frac{Qy_1 + Qy_2 + Qy_3 + \dots + Qy_n}{nQ}$$

$$\zeta = \frac{Qz_1 + Qz_2 + Qz_3 + \dots + Qz_n}{nQ} .$$

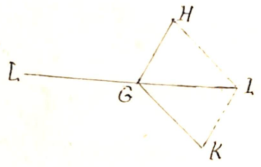
Le quali sono appunto le coordinate del centro di gravità di un sistema di pesi eguali a Q applicati ai punti $x_1\ y_1\ z_1$; $x_n\ y_2\ z_2$; $\dots$ Di qui il seguente teorema, dovuto a Leibnitz (geometra e filosofo tedesco nato nel 1646, morto nel 1716) ; se più forze sono in equilibrio intorno d'un punto e nelle estremità delle rette che le rappresentano si immaginano applicati pesi eguali il centro di gravità di questi pesi è situato in quel punto.

Invertendo la dimostrazione se A è il centro di un sistema applicati ai punti $P_1, P_2 \ldots$ si avrà $\Sigma nQ = \Sigma Q x_1$, onde togliendo Q $n\xi - \Sigma x_1 = 0$ che si può scrivere $\Sigma(x - \xi) = 0$. Con simili se ne dedurrà $\Sigma(y - v) = 0$ e $\Sigma(z - \zeta) = 0$. Le quali sono appunto le eq. d'equilibrio del punto A. Segue dunque ancora il teorema inverso.

Come casi particolari del teorema di Leibnitz si ottengono due altri trovati antecedentemente da Roberval (Giovanni Francese nato nel 1602, morto nel 1678) 1°. Un punto situato nel centro di gravità di un triangolo (cioè il centro di gravità dei 3 pesi applicati nei vertici e eguali fra di loro) sollecitato da 3 forze rappresentate in grandezza e direzione dalle 3 rette che da quello vanno ai 3 vertici del triangolo è in equilibrio. 2° Un punto situato nel centro di gravità di una piramide triangolare (che è il centro di gravità di 4 pesi eguali applicati ai 4 vertici) sollecitato da 4 forze rappresentate in grandezza e direzione dalle 4 rette da quel centro condotte ai 4 vertici della piramide, è in equilibrio



96



Sia a risolversi la seguente questione. Data una triangolo ABC e tre forze GI, GH, GK, trovare un punto D tale che dirigendo ai 3 vertici 3 forze eguali alle date il sistema sia in equilibrio. Immaginiamo se con lati eguali alle 3 forze si costruisce il

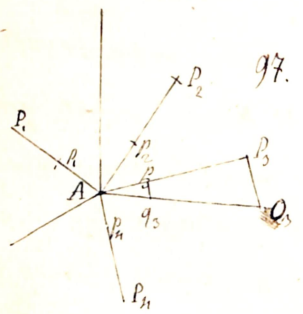
Il triangolo GHI sarà rappresentato dal parallelogrammo GHKL e sarà GL eguale ed opposto alla diagonale GI, il sistema delle forze date GL GH GK sarà nella data posizione d'equilibrio, perchè GL è eguale e direttamente opposta a GI risultante delle GH, GK. Resta poi che si collochi il sistema così disposto nel triangolo per modo che prolungate le 3 direzioni delle forze, esse vadano ai vertici; il che si ottiene agevolmente descrivendo sui lati AC, BC, 2 segmenti capaci di 2 degli angoli che fanno fra loro le 3 forze. È chiaro che tirando dalla loro intersezione D le 3 DA DB, DC, queste faranno fra loro gli angoli stessi che le GL, GH, GK; di più prendendo DA = LG, DE = GK DF = GK, le 3 DA, DE DF rappresenteranno il sistema delle forze date in equilibrio.

Se A, B, C, fossero 3 centri di attrazione la cui virtù attrattiva fosse proporzionale alla distanza al punto attratto e si domandasse in qual punto del triangolo ove elementi materiali sollecitati da questi 3 centri si collocherebbe in equilibrio, è evidente che il centro di gravità sarebbe quello che ci domanda l'altro condizionato in che siano ai 3 punti A, B, C, le forze che lo sollecitano sarebbero proporzionali alle stesse e quindi sarebbero da queste rappresentate tutti. Il punto pel 1° teorema di Roberval sarebbe dunque equilibrato.

Così nel caso in cui i 3 centri abbiano egual forza attrattiva; supponiamo che la forza attrattiva dei punti A, B, C, fosse proporzionale ai 3 numeri f_1 f_2 f_3: allora alla distanza d l'attrazione dei punti A, B, C sarebbe $f_1 d$, $f_2 d$, $f_3 d$; il punto D dovrà dunque essere in equilibrio sotto l'azione delle 3 forze $f_1 \times AD$, $f_2 \times BD$; $f_3 \times CD$. La risoluzione in questo caso dipende da un

un diverso enunciato da si può dare al teorema di Leibnitz.

Siano in A applicate le forze AP_1 AP_2 ... Supposto A centro di tanti pesi eguali Q applicati ai punti P_1 P_2 ... Ora che da un numero di applicate queste stesse eguali alle ritenute a distanze eguali Ap_1 Ap_2 Ap_3 ... si applichino pesi proporzionali alle forze colle quali vengono si prendono i punti p_1 p_2 p_3 ... A sarà ancora il centro di gravità di questi pesi. Applicate ancora il medesimo ragionamento alla dimostrazione della seguente equazione



97.

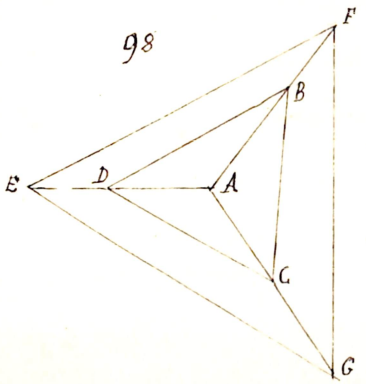
coordinate $\xi = 0 = Qx_1 + Qx_2 + Qx_3 + \ldots$ $\quad \eta = 0 = Qy_1 + Qy_2 + Qy_3 + \ldots$

$$\zeta = 0 = Qz_1 + Qz_2 + Qz_3 + \ldots$$

Ora se per esempio dal punto P_3 abbassiamo la perpendicolare P_3Q_3 sarà $AQ_3 = x_3$ Per ipotesi quindi a la distanza Ap si avrà $AP_3 : Ap_3 :: P_3 : a$. Ma abbiamo ancora peso p_3 : peso P_3 :: forza $P_3 \times Q$: forza Q e viceversa $x : Aq_3 :: P_3 : a$. Ne avremo dalla prima peso p_3 = peso $P_3 \times \frac{\text{forza } P_3 \times Q}{\text{forza } a}$ = peso $P_3 \times$ forza $P_3 = \frac{\text{forza } P_3 \times Q}{a}$. Dalla 2ª si ha $Aq_3 = x \frac{a}{P_3}$ Il momento del peso P_3 sarà dunque Qx; il momento del peso p_3 sarà $Q \times \frac{\text{forza } P_3}{a} Aq$ $= Q \frac{P_3}{a} x \frac{a}{P_3}$; ossia Qx: vedesi dunque che aumentando il peso e diminuendo la distanza del punto d'applicazione nelle stesse proporzioni resta sempre il momento del peso nel centro di gravità di tutti i pesi, e le eq.ni precedenti rappresentano

Da ciò è facile dedurre la soluzione del problema proposto — Se f_1 f_2 f_3 ...

siano le forze attrattive dei 3 punti B, C, D, le forze sollecitanti il punto A verso ciascuno dei 3 centri saranno $BA \times f$; $CA \times f_2$ $DA \times f_3$; prendendo AF, AG, AE a queste quantità o proporzionali rispettivamente eguali, il punto A dovrà stare in equilibrio fra le 3 forze AF AE, AG. A sarà dunque il centro di gravità di 3 pesi eguali applicati in F, E, G. Sia Q l'espressione di questi pesi; invece di applicare il peso Q alle distanze $AB \times f_1$ $AC \times f_2$, $AD \times f_3$ si può pel teorema precedente sostituire i pesi $Q \times f_1$, $Q \times f_2$, $Q \times f_3$ alle distanze AB, AC, AD, ed A sarà ancora il centro del sistema. Si vede la dimostrazione può facilmente estendersi a qualunque N° di centri attraenti, segue che quando più centri attraenti delle forze respettive f_1 f_2 f_3 f_n .... attraggono un punto in ragion diretta delle distanze il punto si costituisce in equilibrio nel centro di gravità di pesi applicati nei centri attraenti, e proporzionali per ciascun centro alla sua forza attrattiva.



(Venturoli 95-98 Poisson 55. 67.)

LEZIONE XXVIII.

Equazioni d'equilibrio d'un punto sopra una superficie indefinitamente resistente e non soggetto ad attrito. Eq. d'equilibrio d'un punto obbligato a stare sopra 2 superficie ad un tempo – Quale sieno le condizioni d'equilibrio d'un punto fisso. – Equilibrio d'un punto soggetto a muoversi sulla gragia ma vincolato condizioni di obbligato a certi circoli. –

Dopo d'aver ricercato le condizioni d'equilibrio d'un punto intieramente libero cominciamo a considerare punti legati a certe condizioni, e primieramente l'equilibrio d'un punto costretto a stare sopra una superficie qualunque indefinitamente resistente e non soggetto a verun attrito.

Quando un punto materiale s'appoggia sopra una superficie d'un corpo immobile e fisso, s'incontra tantosto di farlo scorrere su tal superficie una certa resistenza che si dice attrito. Noi supponiamo per ora la superficie considerata esente da questa resistenza, onde un punto appoggiato sopra una superficie sarà per noi libero di scorrere per tutti versi della superficie medesima. Mentre tenta di far muovere il punto contro alla superficie nel senso della Normale verso cotesta avanzarsi appoggiandosi a questo moto la resistenza della particella d'area si pure composto il corpo con appoggiare la superficie, che basterà distruggere questo moto colla loro reazione. Questa resistenza non può essere dipendente dalla costituzione fisica del corpo; noi riconosceremo tal resistenza come

indefinita. A intervalli della forza che verrà così ad elidersi contro la superficie mentre contrabilancierà la pressione risultante dalla superficie stessa. Ecco in che legge generale della natura che ad ogni azione corrisponda reazione eguale ed opposta tale resistenza nascerà egualmente la pressione esercitata dalla superficie sul punto materiale che ad esso si appoggia.

Da tale guisa adunque diviene che perchè un punto sia in equilibrio sopra una superficie, è necessario che la risultante di tutte le forze che lo animano sia normale alla superficie e tenda a spingere il punto contro la superficie stessa. Risolta tal risultante una sua normale alla superficie si potrebbe scomporre in 2, una normale a questa superficie e da essa elisa; l'altra tangenziale che farebbe correre il corpo lungo la superficie. contro l'equilibrio

Volendo esprimere analiticamente tal condizione sia $f(x,y,z)=$ costante l'eq. della superficie in questione, siano x, y, z le coordinate del punto sulla superficie; differenziando l'eq. proposta essa si cangerà in

$Ldx + Mdy + Ndz = 0$ dove $L = \frac{df(x,y,z)}{dx}$; $M = \frac{df(x,y,z)}{dy}$; $N = \frac{df(x,y,z)}{dz}$

le eq. della normale alla curva saranno

$M(X'-x) - L(Y'-y) = 0$ $N(X'-x) - L(Y'-y) = 0$ Onde chiamando

λ, μ, ν i suoi angoli coi 3 assi avremo

$\cos\lambda = \frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$ $\cos\mu = \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$ $\cos\nu = \frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$

Ecco risolta dalla geometria analitica a 3 dimensioni. Gli angoli λ, μ, ν. dovranno esser eguali a quelle che fa cogli assi la risultante S delle forze $P_1, P_2, P_3 \ldots$ applicate al punto x, y, z; i quali angoli hanno per

essendo (Leg IX) $\cos\alpha = \frac{\Sigma P\cos\alpha}{S}$; $\cos\beta = \frac{\Sigma P\cos\beta}{S}$; $\cos\gamma = \frac{\Sigma P\cos\gamma}{S}$

Dunque $\frac{\Sigma P\cos\alpha}{S} = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$; $\frac{\Sigma P\cos\beta}{S} = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$; $\frac{\Sigma P\cos\gamma}{S} = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$

Affinche la condizione del rapportare qualunque sia la forza normale S, convenga dimostrata, è necessario che sia eguale a

$$\frac{\Sigma P\cos\alpha}{\Sigma P\cos\beta} = \frac{l}{m} \qquad \frac{\Sigma P\cos\alpha}{\Sigma P\cos\gamma} = \frac{l}{n}$$

Le quali condizioni si riducono alla proporzione.

$$\Sigma P\cos\alpha : \Sigma P\cos\beta : \Sigma P\cos\gamma :: l : m : n \quad \ldots \quad (1)$$

Alla qual formola si perviene pure, osservando che la normale alla risultante dovendo confondersi a questa spezie diagonale d'un parallelepipedo rettangolo di lati eguali a $\Sigma P\cos\alpha$, $\Sigma P\cos\beta$, $\Sigma P\cos\gamma$, mentre la proiezione $\sqrt{l^2+m^2+n^2}$ della normale è diagonale del parallelepipedo rettangolo di lati l, m, n. Tali 2 parallelepipedi rettangoli saranno simili ed avranno i loro lati omologhi proporzionali. Quanto alla condizione che la risultante tenda a passare per un punto contro la superficie questa non si può ommettere assolutamente ma bisogna determinarla in ogni caso. Con la eq (1) nel caso della sfera si ha

$$\Sigma P\cos\alpha : \Sigma P\cos\beta : \Sigma P\cos\gamma :: x : y : z.$$

Se x, y, z sono le coordinate del punto. Se il punto è fuori o nella parte esterna della superficie sferica, la risultante dovrà tirarsi in dentro oppure gli angoli di essa cogli assi saranno. $\cos\alpha = -\frac{x}{r}$; $\cos\beta = -\frac{y}{r}$ $\cos\gamma = -\frac{z}{r}$ perche in questo caso la direzione della risultante deve fare colla parte positiva dei x, y, z assi degli angoli ottusi.

Sia per esempio un paraboloide ellittico $ax^2+by^2+cz=0$ coll'asse verticale e colla concavità a disopra del piano xy: differenziando si avrà $2axdx+2bydy+cdz=0$ $l=2ax$, $m=2by$, $n=-c$ le eq. d'equilibrio d'un punto appoggiato e star su di esso saranno. $\Sigma P\cos\alpha : \Sigma P\cos\beta : \Sigma P\cos\gamma :: 2ax : 2by : -c$: e se si suppone che il punto sia dentro del paraboloide i coseni degli angoli che fa la risultante cogli assi saranno.

$$\cos\alpha = \frac{2ax}{\sqrt{4a^2x^2+4b^2y^2+c^2}}; \quad \cos\beta = \frac{2by}{\sqrt{4a^2x^2+4b^2y^2+c^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{+c}{\sqrt{4a^2x^2+4b^2y^2+c^2}};$$

poichè α, β, sono acuti, e il solo γ è ottuso nella supposta posizione del paraboloide.

Prenderemo in 2° luogo ad esaminare le condizioni d'equilibrio di un punto soggetto a stare ad un tempo su 2 superficie date e sufficientemente resistenti, non soggetto ad attrito. Questo punto dovrà evidentemente trovarsi nella comune intersezione di queste 2 superficie, e la risultante di tutte le forze da cui siamo dotati dovrà essere normale alla curva. Quindi l'angolo di essa col tangente sarà retto; chiamando λ, μ, ν. gli angoli della tangente cogli assi, α', β', γ' quelli della risultante coi medesimi assi sarà: $\cos\delta = \cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma$.

Ora se R sia la risultante si avrà.

$$\cos\alpha = \frac{\Sigma P\cos\alpha}{R}; \quad \cos\beta = \frac{\Sigma P\cos\beta}{R}; \quad \cos\gamma = \frac{\Sigma P\cos\gamma}{R};$$

e se sia ds l'elemento della curva. $\cos\lambda = \frac{dx}{ds}$; $\cos\mu = \frac{dy}{ds}$; $\cos\nu = \frac{dz}{ds}$

Dunque $\cos\delta = \frac{\Sigma P\cos\alpha\, dx + \Sigma P\cos\beta\, dy + \Sigma P\cos\gamma\, dz}{R.ds.}$

Ora δ essendo retto $\cos\delta = 0$ eguale. $\Sigma P\cos\alpha\, dx + \Sigma P\cos\beta\, dy + \Sigma P\cos\gamma\, dz = 0$ (2)

Tale è l'eq. d'equilibrio del punto. Bisognerà aggiungere a questa l'altra condizione evidentemente necessaria, che la risultante scomposta in 2 normali alle 2 superficie nel punto considerato, dia queste 2 normali dirette a premere il punto contro le 2 superficie. Per il che si richiede che tal risultante sia compresa

nell'angolo che fanno i 2 piani tangenti alle 2 superficie opposte al vertice e quello in cui si trova il punto.

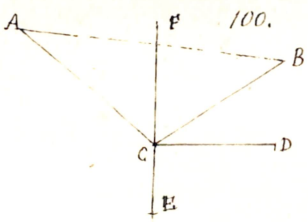
Se finalmente vogliamo considerare un punto soggetto a stare sopra 3 superficie noi vedremo facilmente che esso dovrà stare costantemente nel punto loro comune intersezione senza potersene mai sfuggire, e ciò è insieme costantemente in equilibrio indipendentemente da ogni condizione.

Gli 3 casi d'equilibrio da noi esaminati comprendono in se tutti i casi in cui un punto sia sfuggellato a delle condizioni sia per altro sia relazioni fra le sue coordinate sia per via di vincoli materiali — Quale è evidente che il dare una o 2 relazioni fra le coordinate del punto equivale ad sfuggellarlo a stare sopra quella superficie che sono rappresentate dalle relazioni date. L'esistenza poi di vincoli materiali qualunque i quali permettano al mobile certi movimenti, e tra quegli tutti gli altri, equivale alla esistenza di una o 2 superficie sulle quali il mobile sia obbligato a rimanersi. E l'equilibrio con questi vincoli sarà ancora perchè la risultante possa essere diretta, dalle superficie da questi vincoli rappresentate, non sia normale a quelle superficie. Le eq. di questa superficie esprimono le relazioni necessarie che devono passare fra le coordinate del mobile in virtù dei vincoli da cui è tenuto. Ulteriori cenni ad schiarimento.

Sia per es al punto A attaccata una verga inflessibile e imestendibile alla cui estremità opposta sia fissa un punto B (fig. 39), è chiaro che il punto B potrà muoversi nello spazio in modo che la sua distanza da A sia costante. Esso dovrà dunque muoversi su una sfera di centro A e di raggio AB.

99. e se si dimanda la sua condizione d'equilibrio si potrà immediatamente ricorrere alla proprietà che la risultante delle forze che lo animano sia nella direzione AB. Se AB invece è [illegible] fosse filo flessibile, il punto sarebbe soggetto a stare dentro una superficie sferica di raggio AB.

Sia C un anello scorrevole per un filo inestensibile ABC (Fig.a 100) fisso nei suoi capi A, B: in questo caso il punto C sarà obbligato a tal condizione che la somma delle sue distanze dai punti A e B sia costante. Questa costante eguale alla lunghezza d'un elissoide di rivoluzione di cui i fuochi sono A, B, C. e il grand'asse o asse di rivoluzione sia eguale alla lunghezza del filo. Che se oltre a questa condizione l'anello C fosse costretto ad una corda inflessibile ed inestensibile fissa per il capo D, C sarebbe obbligato a rimanersi ad una lunga e sopra l'elissoide e sopra la sfera che ha D per centro e per raggio DC. Questi vincoli lo obbligano perciò a stare sulla curva comune intersezione dell'elissoide e della sfera già detti.



100.

Ciò accade se le 2 porzioni CA, CB del filo ad ogni posizione di C diventino due inflessibili e che pure sia inflessibile CD, che se ACB e CD siano fili flessibili il punto C potrà stare in tutti quei punti dello spazio che sono compresi dentro la sfera e dell'elissoide.

Nel caso in cui la corda CD abbia il suo punto D infinitamente lontano, la sua esistenza equivarrà all'esistenza d'un piano EF ortogonale alla sua

direzione. In questo caso se le rette CB, CA, si raggiungono inflessibili, il punto C. rimarrà sull'ellisse indipendentemente dal piano e dall'ellissoide; se AB sia un filo flessibile il punto non sarà obbligato di a stare nello stesso piano contenente e limitato da quest'ellisse.

Basterà ciò per dimostrare come stanno coi punti con cerchioli, a proseguirlo rimanere sopra o dentro ad una o 2 superficie; Obligare le sue coordinate ad una o 2 relazioni fra di loro siano pel Meccanico espressioni equivalenti.

(Venturoli 99-102; Poisson 36-38)

LEZIONE XXIX.

Equilibrio di un piano intorno ad un punto fisso. – Momento di rotazione di una forza rispetto ad un punto. – La somma algebrica dei momenti delle componenti è eguale al momento della risultante – Espressione analitica del momento di una forza – Eq.ni d'equilibrio del piano intorno al punto fisso.

SICCOME la statica si propone di esaminare l'equilibrio non solo di quelli che esistendo dei corpi si domandano fatti, ma ci troveremmo ora in istretto dell'equilibrio di questi altri, e per venire dal facile al difficile incominceremo a considerare l'equilibrio di un piano intorno ad un punto in esso fissato.

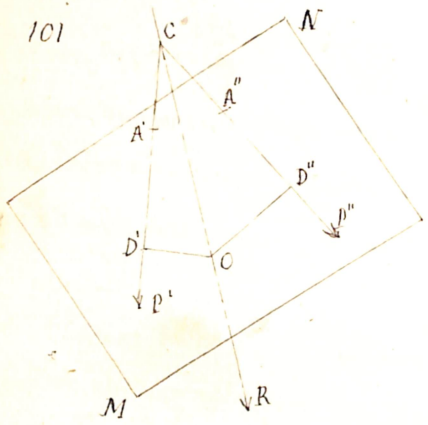
Sia dunque il piano MN (Fig.ª 101) fissato al punto O in modo che possa girare liberamente intorno ad esso conservandosi sempre nel proprio piano; e siano applicate ai suoi punti A' A'' ... le forze P' P'' ... contenute nel piano stesso. Si domanda quali relazioni devono esistere fra queste forze perchè il piano si costituisca in equilibrio. È chiaro che se componendo in una tutte queste forze ella non passa pel punto O, tenderà questo a far girare il piano nella loro direzione intorno O; onde non vi sarà equilibrio. E dunque necessario per l'equilibrio che la risultante passi per O; che allora essa venendo distrutta dalla resistenza indefinita opposta da questo punto, il piano non potrà muoversi rotando nè da un lato nè dall'altro.

Consideriamo 1° le 2 forze P_1 P_2 applicate in A_1 A_2 l'una di esse cioè

P, tende a far ruotare il piano da destra a sinistra: onde generalmente l'equilibrio si conseguirà bisognerà che P, tenda a farlo rotare nel senso contrario. Ripetiamo la costruzione delle 2 precedenti per O, se da O si abbassano due perpendicolari sulle 2 corrispondenti si avrà come per un teorema dimostrato nel parallelogrammo delle forze

$OD' : OD'' :: P'' : P'$ ossia $OD' \times P' = OD'' \times OP''$

cioè i prodotti delle 2 forze per le rispettive distanze abbassate da O sulle loro direzioni devono esser eguali.

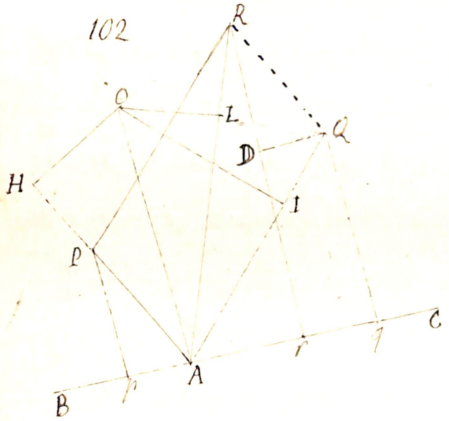


101

Noi chiameremo momento di rotazione della forza P' rispetto ad un punto O il prodotto di F per la lunghezza della perpendicolare abbassata da O sulla direzione della forza medesima. Se si prenderanno come positivi i momenti delle forze agenti in un senso, cioè che tendono ad imprimere un moto rotatorio in un senso, si dovranno come negativi i momenti delle forze che tendono ad imprimere rotazione nel senso opposto. Si chiama poi risultante dei momenti il punto O.

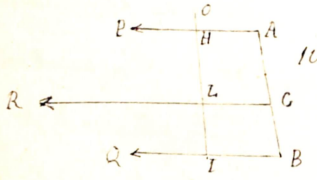
Così il prodotto $P' \times D'O$ è il momento di rotazione di P' rispetto ad O, e se questo come positivo, sarà negativo il momento $P'' \times D''O$ della P''. Onde per l'equilibrio del piano nel caso di 2 forze si può dire che la somma algebrica dei momenti delle 2 forze deve esser nulla. Per venire a stabilire le condizioni di equilibrio del piano nel caso che sia sollecitato da un N.o qualunque di forze

in esso giacenti permettiamo una dimostrazione. Siano PA, AQ le forze, P, Q le loro intensità, AR la loro risultante, dico che il momento di rotazione della risultante rispetto ad un punto O è eguale alla somma algebrica dei momenti delle componenti. Difatti se congiungo O con A e da O si abbassano OL, OH, OI sulle 3 forze. Nel caso della figura attuale se prenderemo come positivi i momenti delle AR, AQ, sarà negativo il momento della AP. Quindi si avrà chiamando M il momento della risultante m quello della forza P, μ quello della forza Q $M = AR \times OL$, $m = -AP \times OH$, $\mu = AQ \times OI$. Condotta ora per A, BC ortogonale ad AO, e si abbassino dai punti P, Q, R le perpendicolari ad AC, e parallele ad AO, Oq, Rr, Pp. L'angolo OAp essendo retto sarà PAp complemento di PAO, eppercio eguale ad HOA. I 2 triangoli PAp HOA saranno simili e daranno OH : OA :: pA : PA. onde $OH \times AP = OA \times pA$. E similmente $AR \times OL = OA \times rA$ e $QA \times OI = OA \times qA$ Onde si deduce $M = OA \times rA$, $m = -OA \times pA$, $\mu = OA \times qA$. Siccome poi RQ è eguale e parallela a PA sarà pure $pA = Qq = rq$ Onde sarà $Ar = Aq - rq = Aq - Ap$. Se ne trae poi $M = OA(Aq - Ap) = OA \times qA - OA \times PA$ e quindi $M = m + \mu$. La dimostrazione non varierebbe quando anche i momenti fossero stati tutti positivi. Siccome la dimostrazione è indipendente dall'angolo



delle 2 forze, supporta ancora per 2 forze parallele.

Ma il più frequente caso è quello di una risultante unica. Perciò siano P, Q 2 forze parallele, R la risultante M, μ_1, M_1 i corrispettivi momenti rispetto ad un punto $M = R \times OL = P \times OL + Q \times OL$. Ma $OL = OH + HL$. $OL = OI - IL$; dunque $M = P \times OH + Q \times OI + P \times HL - Q \times IL$. E poiché $P \times HL = Q \times IL$



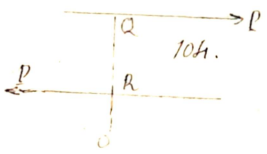
resta $M = P \times OH + Q \times IO = \mu + \mu_1$.

Sia ora un N^{to} qualunque di forze parallele in cui punti $P_1 P_2 P_3 \ldots$ applicate dunque a rette convergenti. Componendo $P_1 P_2$ si avrà $M_1 M_2$ i loro momenti sarà μ_1 momento della risultante $= M_1 + M_2$. Componendo questa risultante con P_3 sarà il suo momento $\mu_2 = \mu_1 + M_3 = M_1 + M_2 + M_3$ Componendo con P_4 questa 2ª risultante se ne otterrà una 3ª il cui momento sarà $\mu_3 = \mu_2 + M_4 = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$. E così progredendo evidente ne viene che: Cioè che il momento di rotazione della risultante di qualunque numero di forze poste in un piano è eguale alla somma algebrica dei momenti delle componenti.

Ritornando ora alle condizioni d'equilibrio di un piano intorno ad un punto sarà facile vedere che per l'equilibrio dovendo la risultante passare per O, il suo momento dovrà esser zero, poiché la distanza sua da O sarà zero. E dunque necessario affinché il piano sia equilibrato che la somma algebrica dei momenti delle forze che su lui operano rispetto al punto O sia zero. Questa è condizione sufficiente.

Nel caso in cui il sistema delle date forze si riducesse ad una coppia la

risultante sarà zero ma siccome è posta a distanza infinita il suo momento rispetto ad un punto non sarà zero. Difatti siano le 2 forze P_1, P eguali e contrarie ma non opposte; il momento della risultante sarà $P \times OQ - P \times OR = P(OQ - OR)$

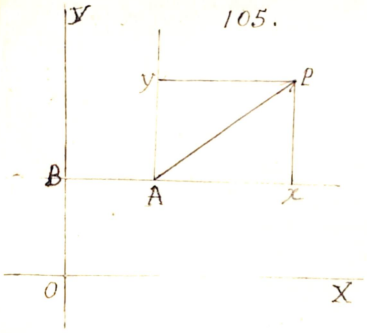


104.

$= P \times RQ$. Non sarà dunque zero e quindi quando il sistema di tutte le forze P, P_2 ... di cui somma algebrica dei momenti eguale a zero, esso manterrà il punto in equilibrio intorno ad O, anche cui si elide l'azione risultante.

Per avere l'espressione analitica del momento di rotazione, sia O il centro del momento, AP una forza P_1; se si scompone la AP in 2 parallele a 2 assi OX, OY, trascurabili comunque nel piano di O e della forza sarà.

$Mom_{\cdot} AP = Mom_{\cdot} Ax + Mom_{\cdot} Ay$. Ora $Mom_{\cdot} Ax = Ax \times OB = Ax \times y$, e



105.

$Mom_{\cdot} Ay = -Ay \times x$, se x ed y sono le coordinate del punto A sia α l'angolo DAx β l'angolo PAy: sarà $Ax = P_1 \cos\alpha = X_1$ $Ay = P_1 \cos\beta = Y_1$ epperò $AP = X_1 y_1 + Y_1 x_1$

Similmente per più altre forze P_2 P_3 .... si avrebbe quindendo per momenti positivi quelli che fanno girare y verso x, negativi quelli che fanno girare x verso y (espressioni che indicano le rotazioni da sinistra a destra e viceversa) e chiamando α_2 α_3 α_4 ... $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ ... i loro angoli cogli assi X_2 X_3 .. Y_2, Y_3 .... le loro componenti secondo gli assi ....

$Mom_{\cdot} P_1 = P_1 (\cos\alpha_1 y_1 + \cos\beta_1 x_1) = X_1 y_1 - Y_1 x_1$

$Mom_{\cdot} P_2 = P_2 (\cos\alpha_2 y_2 + \cos\beta_2 x_2) = X_2 y_2 - Y_2 x_2$

Allora $P_3 = P_3 (\cos\alpha_3 y_3 - \cos\beta_3 x_3) = X_3 y_3 - Y_3 x_3$.

. . . . . .

L'espressione d'equilibrio del piano che abbiamo considerato intorno al punto O sarebbe con queste notazioni

$$X_1 y_1 - Y_1 x_1 + X_2 y_2 - Y_2 x_2 + X_3 y_3 - Y_3 x_3 + \ldots = 0$$

che si scrive più brevemente

$$\Sigma X y = \Sigma' Y x$$

$$\Sigma' (P \cos\alpha\, y) = \Sigma' (P \cos\beta\, x)$$

(Venturoli 104; Poisson 42, 46, 47, 48)

LEZIONE XXX.

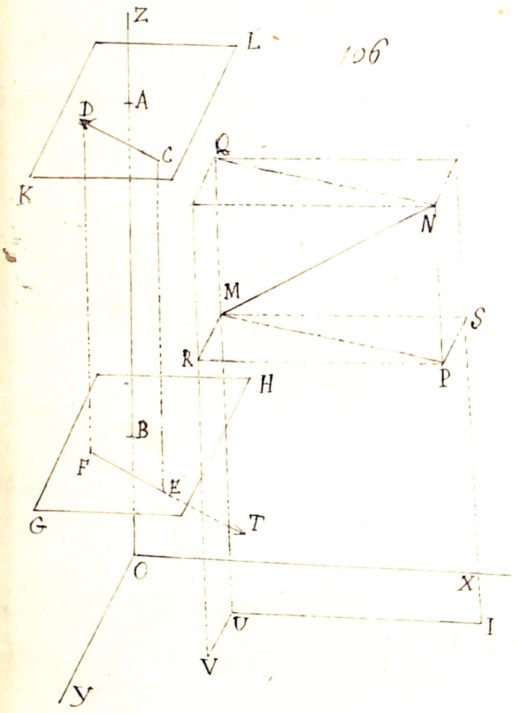
Equilibrio di un sistema rigido intorno ad un asse fisso — Momento di rotazione di una forza rispetto ad un asse — Condizione d'equilibrio del sistema; la somma algebrica dei momenti delle forze deve esser eguale a zero.

Un corpo o sistema rigido ritenuto in 2 dei suoi punti con più prendere un moto di rotazione intorno alla retta che passa per questi 2 punti o cardini, e che dicesi l'asse di rotazione del corpo.

Delle forze applicate a vari punti di questo corpo quelle che sono direttamente all'asse di rotazione non avranno verun effetto nè per produrre nè per impedire il suo moto rotatorio essendo normali alle rette su cui sono ritenuti tutti i punti del corpo e la loro efficacia sarebbe distrutta dall'inflessibile resistenza dei cardini. Nella ricerca delle condizioni d'equilibrio di questo corpo o sistema si può dunque fare astrazione delle componenti delle forze che sollecitano il sistema, parallele all'asse, l'effetto delle quali sarebbe distrutto dai cardini; in conseguenza non potremo solo tener conto delle forze che non hanno alcuna componente secondo l'asse di rotazione, e che perciò sono contenute in un piano ad esso ortogonale.

Consideriamo (Fig 106) la forza DC posta in un piano LK ortogonale all'asse ZO di rotazione. Dico che se si conduce un altro piano GH ortogonale a ZO e si proietta la DC in FE sul medesimo, alla forza DC si può sostituire la FE. Difatti se poniamo una 3ª forza TE eguale e contraria a FE

le 2 forze TE, CD essendo eguali, e di momenti di segno contrario tutte le momenti saranno eguali e opposte intorno all'asse si faranno equilibrio. Ma le 2 EF, ET si faranno pure equilibrio. Dunque EF eguale a DC



156

Sia una forza MN diretta comunque nello spazio, se per essa si fa passare un piano QP parallelo all'asse Z e si scompone la forza in 2, MQ parallela a quest'asse e MP ad esso ortogonale, la forza MQ verrà data dai cardini di il momento di rotazione di MN (x) si ridurrà a quello data dai cardi di MP

Ma noi proviamo alla MP sostituita una forza eguale e parallela ed equidistante dall'asse, come la sua proiezione sul piano XOY ortogonale all'asse e preso per piano di momenti, o ciò che è lo stesso le proiezioni VU, UI sullo stesso piano delle componenti RM. MS di MN parallele agli assi x ed y.

Il momento di rotazione della forza MN rispetto all'asse ZO è ridotto alla somma dei momenti di UV, UI rispetto all'asse medesimo o rispetto al punto O: la quale somma chiamando α, β, γ gli angoli

(Seguendo)

di MN coi 3 assi x, y, z le coordinate di M è $Pcos\alpha\, y - Pcos\beta\, x$.

Se ora noi supponiamo che il corpo sia in equilibrio intorno all'asse, astratta [illegible] fatta dalle componenti secondo l'asse z, sarà ancora in equilibrio quando sia solo sollecitato dalle componenti secondo x ed y, trasportate nel piano xy. Vedesi adunque che l'equilibrio del corpo rimane dietro sé quello del piano xy sotto l'azione delle componenti secondo x ed y

Fatti così manifesti la somma dovendo esser zero segue che

$$\Sigma(P\cos\alpha . y) = \Sigma(P\cos\beta . x) \quad o \quad \Sigma(Xy) = \Sigma(Yx)$$

Sarà ancora la condizione d'equilibrio del corpo e la relazione che deve esistere tra le forze perchè tale stato si mantenga.

Quest'eq. non contenendo la componente secondo l'asse z segue che questa proiezione aver qualunque grandezza e mutarsi in qualunque modo, purchè però naturalmente la proiezione dei raggi.

Nel caso in cui l'asse di rotazione ortogonale al piano xy non fosse l'asse delle z, ma le coordinate di O fossero a e b basterebbe nella suddetta eq. cangiare x in $x+a$, y in $y+b$ per avere nella eq. di condizione.

$\Sigma Xy' + \Sigma Xb = \Sigma Yx' + \Sigma Ya$ e posto a e b zero ottenuti avrà

$$\Sigma Xy' - \Sigma Yx' + b\Sigma X - a\Sigma Y = 0$$

(Venturoli 108-109 ; Poisson 271-272)

(*) Si rovesta che per momento di rotazione di una forza intorno ad un piano ortogonale all'asse si intende il prodotto dell'intensità della forza per la distanza della sua direzione dall'asse, ossia per la lunghezza della perpendicolare comune all'asse e alla direzione della forza.

LEZIONE XXXI

Condizioni generale di un sistema rigido sollecitato da forze parallele – Equilibrio dei corpi pesanti – Equilibrio di un grave corpo sostenuto da appoggio piano o punto – Equilibrio stabile, instabile, neutro.

PRIMA di venire ad esaminare le condizioni d'equilibrio di un corpo o sistema assolutamente libero sollecitato da forze comunque dirette, incominceremo dal supporre come caso particolare che le forze sollecitanti siano tra loro parallele.

Quando più forze parallele applicate a più punti di un corpo siguali supporremo formare un sistema rigido, ossiano nel corpo medesimo, esso sistema equivale ad una forza ad esse parallela, eguale alla loro somma, applicata nel loro centro (Lez XIV); oppure a 2 forze eguali contrarie, una esse opposte formanti una coppia. In quest'ultimo caso una delle forze proviene dalle forze agenti nel senso positivo, ed eguaglia la loro somma; la seconda delle forze della coppia è la risultante delle forze agenti in senso negativo. Per l'equilibrio è necessario primieramente che la somma delle forze positive eguagli la somma delle negative, o indicando con P qualunque delle forze.

$$\Sigma P = 0 \qquad \text{(1)}$$

Di più è necessario che la risultante delle forze positive sia direttamente contraria a quella delle forze negative; ed che importa che unendo i centri delle ~~gravità~~ prime con quello delle seconde, la retta che le congiunge sia parallela alla direzione delle forze; allora la retta che unisce i 2 centri sarà parallela all'asse z. Quindi le coordinate x_n y_n; x_v y_v

dei 2 centri dovranno essere eguali: Designando con p_n qualunque forza positiva con p_n qualunque forza negativa sarà,

$$x_u = \frac{\Sigma p_n x}{\Sigma p_n} \; ; \; y_u = \frac{\Sigma p_n y}{\Sigma p_n} \; ; \; x_v = \frac{\Sigma p_n x}{\Sigma p_n} \quad y_v = \frac{\Sigma p_n y}{\Sigma p_n}$$

Quindi $x_u = x_v$; $y_u = y_v$ ovvero operando che la (1) da $\Sigma p_n = \Sigma p_n$

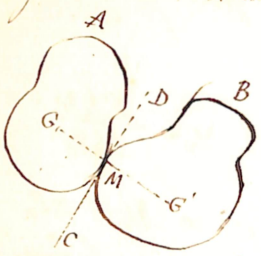
$\Sigma p_n x = \Sigma p_n x$, $\Sigma p_n y = \Sigma p_n y$; o facendo la somma algebrica.

$$\Sigma p x = 0 \quad \Sigma p y = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

Queste 2 unite alla (1) determinano l'equilibrio. Quando la (1) è soddisfatta ma non le (2) non v'ha equilibrio ma una coppia giacente in un piano parallelo alla direzione delle forze. Se sono soddisfatte la (1) e la prima delle (2), la coppia giace in un piano parallelo all'yz; se la (1) e la seconda delle (2) in un piano parallelo all'xz. Se la (1) non è soddisfatta v'ha risultante unica. Per l'equilibrio di un sistema di forze parallele è dunque necessario che la somma algebrica delle stesse sia zero, e che siano pure zero le somme algebriche dei loro momenti rispetto a 2 piani paralleli alla loro direzione.

Caso particolare dell'equilibrio di un sistema di forze parallele è l'equilibrio dei corpi pesanti: Siano due corpi A e B di massa M ed M'; sia ciascun corpo animato in ciascuna molecola da forze parallele proporzionali alla massa delle stesse e sia g la forza agente sull'unità di massa del corpo A, g' quella che agisce sull'unità di massa del corpo B. La forza del corpo A sarà Mg : $M'g'$ quella di B. Esse dovranno essere volte in parte opposte, se il sistema dei corpi A, B deve essere in equilibrio. Siccome queste 2 forze debbono ancora essere opposte direttamente, i loro punti di applicazione sono i centri G, G' di gravità dei 2 corpi e siccome

necessario che GG' si trovino su una retta parallela alle forze. Oltre a ciò perché un corpo non ruoti sull'altro il punto M di contatto deve trovarsi sulla GG'. E perché non scorrano l'uno sull'altro bisogna che il piano tangente comune alle 2 superficie in M sia normale a GG'. Queste condizioni sono equivalenti a quella di $Mg = Mj$ determinano l'equilibrio dei 2 corpi che troviamosi stretti l'un contro l'altro senza avere alcun moto né comune né particolare

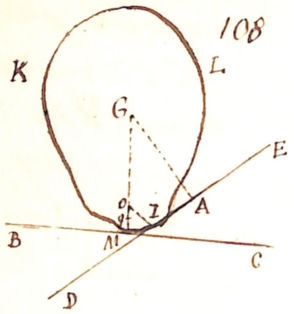


Equilibrio di un grave sospeso. - È necessario dapprima che il punto di sospensione opponga una resistenza almeno eguale al peso del grave; perché questa resistenza e questo peso possono considerarsi come 2 forze parallele e volte in parti contrarie. Di più bisogna che il punto di sospensione, che è il punto d'applicazione della prima forza si trovi nella stessa verticale col centro di gravità, punto di applicazione della seconda. Di qui è facile il dedurre la posizione d'equilibrio di un grave sospeso per un suo punto qualunque; poiché conducendo una retta da questo punto al centro di gravità, tal retta dovrà disporsi verticalmente e ne verrà conseguentemente determinata la posizione che si cercava. E così supponiamo ancora il punto di sospensione col centro di gravità per via di una verga rigida di cui sia trascurabile, è evidente che dato il punto di sospensione, o saranno le posizioni di equilibrio del grave, perché in 2 modi si può collocare il centro di gravità nella stessa verticale col punto di sospensione; cioè sopra di questo o sotto di questo. Egli è evidente che nel 1° di questi casi l'equilibrio si compie per una minima scossa, ed il grave discende per breve tratto al punto di sospensione nel punto più basso possibile. In questo caso l'equilibrio si dice instabile o transitorio;

e se è possibile matematicamente parlando, non lo è fisicamente; poichè è impossibile collocare il corpo in modo che il suo centro di gravità ed il suo punto di sospensione siano collocabili nella medesima verticale esattamente. Di più sono inevitabili le minime scosse. Ma nel 2° caso il corpo ritornando il più tosto possibile, ancorchè si arrivi di portarnelo in ritorna dopo un numero più o meno grande di oscillazioni. In tal caso l'equilibrio dicesi stabile o permanente. Similmente se si suppone che il centro di gravità ed il punto di sospensione coincidano, ossia qualunque disposizione si dia al corpo esso si troverà sempre nella stessa verticale ed in conseguenza l'equilibrio sussisterà sempre, senza che il corpo cerchi mutare posizione. In tal caso l'equilibrio del corpo è neutro o indifferente.

Equilibrio di un grave appoggiato ad un piano — Un grave può essere appoggiato ad un piano per un punto, per più punti, per una linea o per una superficie. Qualunque sia il numero di punti d'appoggio è dapprima evidente che affinchè il corpo non si rovesci sul piano bisogna che la forza della gravità agisca normalmente a questo piano, in una parola il piano deve essere orizzontale. Poi prendendo ad esaminare i gravi che si appoggiano al piano per un sol punto, agevolmente vedremo che affinchè il corpo non rotoli nel piano bisogna che il punto di appoggio si trovi col centro di gravità del corpo nella medesima verticale. Similmente poichè un cilindro retto qualunque appoggiato sul piano per una generatrice sia in equilibrio bisogna che il centro di gravità si trovi nel piano verticale condotto per la generatrice.

L'equilibrio di un grave appoggiato ad un piano per un punto può ancora dirsi stabile, instabile o neutro. Infatti sia KAH. la sospensione di un grave condotta per la verticale, che passa pel punto A di contatto col piano orizzontale BC.



108

Noi potremo per un arco piccolissimo MI di questa sezione considerarla come confondentesi col cerchio osculatore della curva che ha suo centro in O. Or supponiamo che GM > OM; è chiaro che per un piccolo spostamento del solido nel piano della sezione, il punto di contatto M si trasporterà nel punto vicinissimo I; e per comodità della figura invece di mutare la posizione del solido mutando quella del piano e della forza di gravità applicata in G, il corpo si troverà applicato in I al piano DE. L'equilibrio sarà rotto, ed il peso del corpo applicato secondo GA tenderà a continuare al corpo quel moto piccolissimo che gli avrà impresso. Il punto di contatto non ritornerà più in M: l'arco veramente non resta ritenendosi più l'equilibrio esso sarà instabile. Ma se poniamo che il centro di gravità cada fra O ed M, per es. in g; allora spostando in egual modo il solido, il peso applicato in g secondo la perpendicolare abbassata da g su DE agirà per far rotolare il corpo nel senso ID, e per ricondurre in M il punto di contatto. Dopo alcune oscillazioni difatto vi sarà ricondotto, e l'equilibrio sarà stabile. Ma se il centro di gravità del corpo cada precisamente in O spostando il punto di contatto di una quantità piccolissima MI, il corpo si equilibrerà ancora su I, e perciò fra limiti di oscillazioni piccolissime l'equilibrio sarà neutro. È chiaro che per lo stesso punto M l'equilibrio sarà stabile, instabile o neutro, secondochè il raggio di curvatura della sezione verticale fatta per GM è per alcune sezioni maggiore, per altre minore, per altre eguale a GM.

In un elissoide di rivoluzione allungato l'equilibrio sui vertici dell'asse di rivoluzione sarà quindi instabile: l'equilibrio su un punto dell'equatore è stabile nella direzione del meridiano, neutro in quella dell'equatore. Per un segmento di parabola ad una sola base, l'equilibrio sul vertice sarà stabile quando la saetta sarà minore di $\frac{2}{3}$ del semiparametro. Perchè allora il centro di gravità cadrà sotto del foco della parabola del cerchio di curvatura di questa curva, considerata al vertice come confondentesi col cerchio osculatore. Difatti si sa che il centro di gravità del segmento parabolico è ai $\frac{3}{5}$ della saetta partendo dal vertice.

Concluderemo coll'osservare che un corpo non può costituirsi in equilibrio su uno dei suoi punti, se il raggio vettore che a questo va dal centro di gravità non è ortogonale al piano tangente alla sua superficie in quel punto stesso. Ciò non esige dimostrazione.

(Venturoli 133–138; Poisson 262)

LEZIONE XXXII.

Modo generale per determinare in qual caso di equilibrio è un grave appoggiato ad un piano per un punto. — Equilibrio di un grave sopra una curva o superficie qualunque — Equilibrio di un grave appoggiato ad un piano per più punti o per una base —

DALLE cose precedentemente esposte si può venir tosto a giudicare se l'equilibrio di un corpo appoggiato per un suo punto ad un piano orizzontale è stabile, instabile o neutro. Poichè risulta dalla geometria sublime che fra tutte le sezioni normali alla superficie che si possono condurre pel punto di contatto due ve ne sono dette sezioni principali fra loro ortogonali, per una delle quali il raggio di curvatura è massimo, per l'altra minimo; Egli è evidente che se il centro di gravità del corpo cade sotto dei 2 corrispondenti centri di curvature, cadrà pure al disotto del centro di curvatura di tutte le sezioni; onde in qualunque senso si urti minimamente il corpo esso dopo un più o meno lungo oscillare si ricostituirà nella primitiva posizione. Se il centro di gravità cade al disopra di ambedue i centri di curvatura delle sezioni principali, è ancora evidente per le stesse ragioni, che stando esso sopra il centro di curvatura di tutte le sezioni normali, l'equilibrio si turberà per non più ristabilirsi su quel punto, in qualunque senso urtisi il corpo. Ma se il centro di gravità cade fra il centro di curvatura di una sezione principale e quello dell'altra, è chiaro che l'equilibrio sarà stabile nel senso di quelle sezioni per cui il centro di curvatura cade sopra il centro di gravità instabile per quelle pei cui il centro di curvatura sta sotto il centro di gravità,

e neutro per quelle (e son due) il cui centro di curvatura cade sopra lo stesso punto del quello di gravità. Siccome però è fisicamente impossibile turbare all'istante l'equilibrio in una direzione senza che lo si turbi nelle altre segue che veramente anche in questo caso l'equilibrio è sempre instabile. Onde ricordiamo che perchè un corpo sia in equilibrio su un piano resistente orizzontale è necessario che le curvature delle due sezioni pel punto di contatto siano tutte nello stesso verso, ossia che i 2 raggi di curvatura massima e minima siano dello stesso segno; di più bisogna che il centro di gravità del corpo cada sulla normale passante al punto di tangenza e al raggio di minima curvatura.

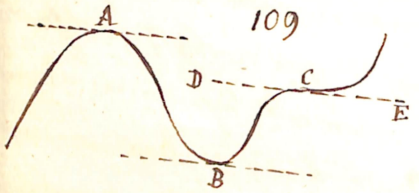
È noto altresì dalla geometria solliqua che per un punto tutto intorno al punto di contatto si può sostituire (pel caso di 2 raggi di segno omologo) un ellissoide osculatore di cui i centri di curvatura delle sezioni normali coincidono con quelli delle sezioni omologhe della superficie. Questo ellissoide deve quindi avere i medesimi raggi di curvatura per le sezioni sue normali. Sia R il raggio massimo di curvatura della superficie nel punto di contatto, ρ il minimo; sia a l'asse verticale dell'ellissoide, b e $c<b$ gli altri 2 assi: sappiamo che per l'ellissoide osculatore sarà $R=\frac{b^2}{a}$; $\rho=\frac{c^2}{a}$. Cosicchè si potrà indietro queste 2 relazioni determinare alla superficie infiniti ellissoidi osculatori in quel punto. Noi potremo scegliere quell'ellissoide omogeneo che il centro di gravità coincide col centro di gravità del dato corpo; se sia h la sua altezza sul punto di contatto si avrà dunque $a=h$; $b=\sqrt{Rh}$; $c=\sqrt{\rho h}$;

In questo modo vedesi che tutto è simile parlando di equilibrio, rispetto all'ellissoide e al corpo dato: poichè le loro superficie pel tratto di piccolo oscilla-

zioni intorno al punto di contatto danno le stesse specie di equilibrio perché i 2 centri di gravità ancora coincidono. Onde si vede che per le condizioni di equilibrio a corpo dato si può sostituire un ellissoide omogeneo osculatore alla superficie nel punto di contatto, e tale che il suo centro di figura coincida col centro di gravità del corpo.

Equilibrio di un punto pesante sopra una curva o superficie qualunque.

Quando affidasi un punto collocato sopra la curva ABC (ciò che è lo stesso sopra un cilindro avente essa curva per direttrice) è evidente che esso non potrà stare in equilibrio che nei punti ove la tangente (o il piano tangente) è orizzontale. Or ciò può avverarsi nei punti ove la curva ha dei massima o dei minima, o dei punti di flesso orizzontale. Nel primo caso l'equilibrio è evidentemente instabile, perché smosso alquanto il punto esso precipiterà al basso invece di ritornare in A. Nel minimum B l'equilibrio è stabile poiché smosso alquanto il grave esso dopo alquanto oscillare ritornerà a B. Finalmente nel punto di flesso C l'equilibrio è ancora instabile. Poiché se si muove il grave da C verso D esso cadrà al basso come pel caso del maximum. Spostandolo invece nel verso CE il mobile salirà alquanto e ritornerà in C discendendo; ma poi per conseguita velocità si muoverà da C verso D, il che rompe l'equilibrio per sempre.



109

Lo stesso criterio vale per le superficie. Un punto si costituirà in equilibrio stabile nei minima assoluti, che sono quei punti per cui tutte le sezioni verticali della superficie passano ad un minimum. Invece per un maximum assoluto, che è quel punto per cui tutte le sezioni verticali passano ad un

maximum, l'equilibrio è evidentemente instabile. Per le linee di flesso orizzontale che sono quelle in cui le curvature della superficie nei seni delle sezioni principali passano dal positivo al negativo, e nei punti orizzontali di flesso l'equilibrio sarà pure instabile. Sarà finalmente ancora instabile per i punti minima e maxima relativi; per i quali i 2 raggi di curvatura delle sezioni principali essendo di contrario segno e diretti secondo la verticale, danno per alcune sezioni verticali dei maxima, per altre dei minima; tale è per es. il centro del paraboloide iperbolico posto colle generatrici paraboliche verticali. In questo punto le superficie sono concavo-convesse o convesse-concave.

Parleremo più tardi la dimostrazione di un generale teorema, pel quale si vedrà che in ogni sistema pesante l'equilibrio ha luogo sempre che l'altezza del centro di gravità sia massima o minima; l'equilibrio essendo transitorio nel 1° caso permanente nel 2°. E' facile vedere come bene le condizioni d'equilibrio dei casi sovra esposti si possano dedurre da questo generale principio.

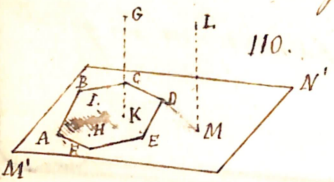
(Venturoli – Ibidem) (Levy, Analyse Appliquée Etc 367–396)

LEZIONE XXXIII.

Stabilità relativa dei corpi appoggiati per più punti o per una base sopra un piano orizzontale e misura di questa stabilità – Applicazioni alle costruzioni e alle torri pendenti – Pressioni sugli appoggi – Equilibrio di un piano appoggiato a 2 piani inclinati per 2 punti o per 2 lati – Pressioni su ciascuno dei 2 piani.

VENENDO a considerare intanto l'equilibrio di un grave appoggiato su di un piano per più punti vedremo che sarà primieramente necessario, affinchè il corpo non rotoli scorrendo sul piano, questo deve esser orizzontale. Poi di più affinchè esso non rotoli sul medesimo, bisogna che la verticale abbassata sul piano dal centro di gravità cada entro al poligono di massima area che si può costruire prendendo per vertici varii dei punti di sostegno.

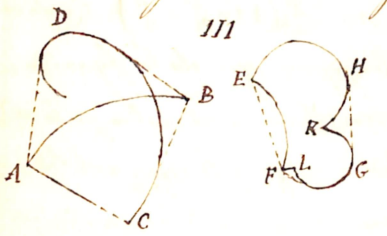
Sia difatti sul piano MN un corpo appoggiato pei punti A, B, C, D, E, I, K, ecc. sia $ABCDEF$ il poligono di massima area che si possa costruire prendendo per vertici alcuni dei punti di sostegno; sia L il centro di gravità del corpo, tale che abbassando la perpendicolare LM, M cada fuori del poligono AD: non potremo considerare il peso del corpo come una forza verticale la quale si applichi in L. Questa forza farà prendere al corpo un moto rotatorio intorno ad uno dei lati del poligono



110.

$ABCDEF$, nel nostro caso DE; e siccome non vi ha altra forza che possa impedire il corpo di rovesciarsi da quel lato. Se all'incontro il centro di gravità è in tal luogo G, che la sua verticale passi per entro al poligono AD, il peso tenderà a rovesciare il corpo intorno ad uno dei lati per es. DE; ma siccome, che la resistenza inevitabile degli altri fulcri F, A, B.. ecc vi si oppone

Quando un corpo s'appoggia al piano MN per una o più linee o per una superficie, tutti i punti di questi potendosi considerare come altrettanti punti di appoggio avrà luogo la medesima regola. Così se il corpo si sostenesse sopra le 2 curve

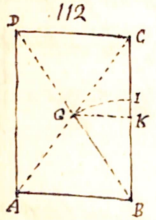


AB, CD il limite entro cui dee passare il centro di gravità sarebbe il poligono mistilineo ACBD, perchè quello è il massimo poligono che si possa costruire prendendo sui vertici di punti di sostegno. Similmente se il corpo si appoggia sulla base EIFLGKH, il poligono limite sarà EFGH.

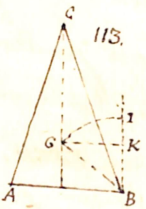
Quando la verticale del centro di gravità cade entro questo poligono limite il corpo sta in equilibrio, ed il suo equilibrio è sempre stabile, perchè non si turba ad ogni minima scossa; è solo instabile nel caso in cui la verticale del centro di gravità cade sopra il perimetro del poligono limite. A lora un piccolo urto può rovesciarlo immantinente. La stabilità dell'equilibrio può però ancora qui considerarsi come relativa, essendo che si può dire che un corpo è tanto più stabile, quanto maggiore forza bisogna impiegare per rovesciarlo. In generale è un principio di dinamica che si dimostrerà a suo tempo che il lavoro necessario per produrre un dato effetto sa di un corpo è eguale al prodotto del peso del corpo per l'altezza cui bisogna sollevare questo corpo, o più ragionevolmente il suo centro di gravità in cui si può considerare come raccolto il suo peso. La stabilità di un corpo da una certa sua parte sarà dunque misurata dal suo peso moltiplicato per l'altezza cui bisogna elevare il suo centro di gravità per rovesciarlo da quella parte. Così se ABCD rappresenta in elevazione verticale un parallelepipedo omogeneo il suo centro di gravità sarà in G, e per rovesciarlo o almeno tenerlo in bilico bisognerà portarlo per l'arco GI in I: quindi l'altezza cui si dovrà elevare il suo centro di

gravità sarà KI, se sia $AB=a$ $BC=h$, P il peso del solido sarà $GB=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+h^2}$, $KI=GB-BK=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2+h^2}-h\right\}$. Quindi la stabilità avrà per misura $\frac{P}{2}\left(\sqrt{a^2+h^2}-h\right)$ Per la piramide d'egual base ed eguale altezza essendo $KB=\frac{1}{4}h$, sarà $KI=GB-BK=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4}}-\frac{h}{2}\right\}$ e la misura della sua stabilità sarà $\frac{P}{2}\left(\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4}}-\frac{h}{2}\right)$. Questa espressione essendo più grande della quella pel parallelepipedo, segue che la figura piramidale è più conveniente che la prismatica per la solidità degli edifizj. Onde si spiegano le regole architettoniche che prescrivono una diminuzione delle dimensioni andando in alto per la maggior sicurtà reale ed apparente degli edifizj. Il quale principio pare anzi sia stato bene inteso dagli antichi Faraoni, i quali nè che volessero tramandare alla posterità la loro memoria per via di solidissimi edifizj, nè che volessero con ciò dare un idea della salda potenza loro, sembrò come più conveniente al fine la figura piramidale. E difatti le piramidi Egiziane contribuirono per la costruzione loro all'incirca di sopra 40 secoli e dovettero questo vantaggio alla loro figura. La piramide massima della di CHEOPS ha per lato della base quadrata 257 m. e 145. m. di altezza, ed è formata di 208 strati orizzontali di massi enormi.

La teoria della stabilità dell'equilibrio di un grave appoggiato ad un piano orizzontale dà ancora la spiegazione di certi fenomeni sorprendenti. Ognuno ha sentito parlare del campanile di Pisa che ha un altezza di 60. m. 75 strapiombo o devia dalla verticale di 4 m. 55. Esso fu eretto nel 1174 ed è controverso se sia stato fabbricato tal quale si vede oppure se sia stato eretto verticalmente, ed abbia quindi deviato dalla verticale per la qual resistenza del suolo sottoposto. A Bologna fu nel 1275 eretta la torre degli Asinelli che ha 100 m. di altezza strapiomba di 1 m. A Bologna vedesi pure la torre Garisenda che ha 50 m. di altezza strapiomba di 3 m. Finalmente una quarta torre pendente è a Saragozza in Spagna la quale fu alzata nel 1595. Questa



112

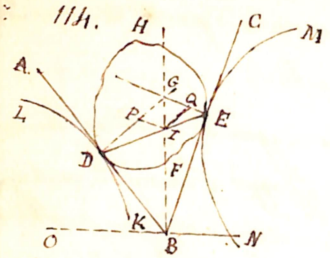


113.

torri non rovinano e non rovinerannno mai perchè il loro centro di gravità non esce dalle verticali che si possono elevare sui perimetri delle loro basi.

Pressioni sugli appoggi. Per un grave che reggasi in equilibrio tenendosi appoggiato per cui sul piano la pressione sul punto di appoggio è manifestamente eguale al peso del corpo, se i punti di appoggio siano 2 o 3 la risoluzione delle forze parallele di 2 o 3 forze applicate a punti dati dà le pressioni per ciascun punto. Poichè si può immaginare trasportato il punto d'applicazione del peso del corpo; là dove la verticale del centro di gravità incontra il piano d'appoggio. Non si possedono ancora conoscenze bastanti per determinare le pressioni sui punti di appoggio in numero maggiori di 3; tanto meno poi per determinare la legge della pressione di un corpo sui singoli punti della base dicasi definita, su cui si sostiene. Noi possiamo però determinare quel particolare caso avenuto il centro di gravità coll'eguale le pressioni su tutti i punti di appoggio siano eguali. Infatti la forza del peso del corpo applicata nel centro di gravità del corpo deve essere eguale e direttamente contraria alla risultante delle contro pressioni esercitate dal piano consistente sui punti di appoggio. Quindi se si immaginano applicati ai punti di appoggio tanti pesi eguali, la risultante delle singole pressioni dei punti d'appoggio, che per ipotesi devono essere fra loro eguali, verrà ad applicarsi in questo punto. Perchè perciò tutti i sostegni siano egualmente gravati è necessario che la verticale del centro di gravità passi pel centro di gravità di tutti i punti di sostegno considerati come gravati di pesi eguali. Se il grave si appoggia ad una linea, bisognerà quindi che la verticale del centro di gravità del corpo passi pel centro di gravità di quella linea; e che passi pel centro di gravità della superficie che serve di base se il corpo si appoggia al piano per questa superficie.

Equilibrio di un grave su 2 piani inclinati Perchè il grave DEH reggasi in equilibrio sui 2 piani inclinati rappresentati in profilo dalle rette AB, BC è primieramente necessario che la comune intersezione dei 2 piani rappresentati

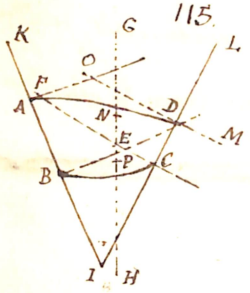


dal punto B sia orizzontale. Ciò fatto noi possiamo scomporre il peso del corpo applicato al centro suo di gravità in 3 forze; 2 normali ai 2 piani ed elise dalla loro resistenza, la 3ª parallela alla loro comune intersezione; alla quale nulla potendosi opporre, essa strascina il corpo parallelamente alla già detta comune intersezione. Nel caso però in cui questa sia orizzontale evidentemente la componente del peso del corpo secondo la sua direzione è nulla; quindi per questo lato l'equilibrio può sussistere. Ma oltre a ciò bisogna che la forza del peso faccia esattamente equilibrio alle controppressioni DG, EG dei 2 piani e cioè stessi normali. Ciò non può essere 1° se queste 2 rette non sono in un medesimo piano colla forza del peso, ciò però se i 2 punti D E non sono nello stesso piano normale alla comune sezione dei 2 piani in cui col centro di gravità; 2° se l'incontro delle 2 DG, GE, cioè G non passa per la verticale GP del centro di gravità. Avverandosi queste condizioni le 3 forze, cioè il peso del corpo e le 2 controppressioni potranno trasportarsi sulle loro direzioni in modo che i loro punti di applicazione coincidano in G: allora le 3 forze applicandosi allo stesso punto, se i 2 piani sono abbastanza resistenti ci sarà equilibrio. Così per es la retta DE sarà in equilibrio fra i piani, quando sia gravata di un peso in I, e pel restante della sua lunghezza sia priva di peso. Se vogliasi avere la pressione su ciascuno dei 2 piedi D, E, basta supporre applicato il peso del corpo in G e scomposto nelle 2 direzioni GD GE. Se sia per es. il peso del corpo = R le 2 pressioni saranno rappresentate da GP, GQ e le formole per la scomposizione delle forze daranno R : P :: Q :: sen DGE : sen BGE : sen BGD: oppure poichè sen DGE = sen DBE suo supplemento, e di più BGE = EBN, e BGD = DBO si avrà chiamando Φ l'angolo dei 2 piani ε ε quelli dagli stessi

col piano orizzontale NO, $R : P : Q :: \operatorname{sen} \varphi : \operatorname{sen} \zeta : \operatorname{sen} \xi$. Onde dato R si ricavano P e Q. E per manifesto che se il centro di gravità del corpo è sopra del punto G, l'equilibrio è instabile; stabile nel caso contrario.

Supponiamo ora che il corpo si appoggi ai 2 piani KI IL, per mezzo di 2 superficie piane rappresentate dalle rette AB, CD. Bisogna per l'equilibrio che la forza del peso del corpo possa intendersi applicata in un punto N tale, che abbassando da esso 2 perpendicolari ai 2 piani, i loro piedi cadano nel perimetro delle 2 basi, o ciò che è lo stesso che il peso del corpo applicato in N possa scomporsi in 2 forze normali ai 2 piani, e che già supponiamo abbiano per comune sezione orizzontale che cadano ad elidersi contro le resistenze delle 2 basi. Or perchè ciò sia è evidente che bisogna che il punto N si trovi entro ai 2 alliedri normali ai 2 piani e aventi per basi le aree AB, CD. Bisogna dunque che il punto N si trovi entro lo spazio comune ai 2 alliedri ABMO, CDFO. Siccome poi il punto N cui si può intendere applicata la forza di gravità è un punto qualunque della verticale del centro di gravità, segue che per l'equilibrio in questo caso è necessario che la verticale GH che passa pel centro di gravità abbia qualcuno almeno dei suoi punti comune collo spazio comune ai 2 alliedri già detti; cioè che almeno uno dei punti della verticale GH si trovi contemporaneamente entro ai 2 alliedri. Le pressioni sopra ciascuna delle facce si otterranno come precedentemente, aggiungeremo solo che affinchè la pressione riesca uniformemente distribuita, bisogna che le normali abbassate dal punto N sui due piani cadano nei centri di gravità delle 2 basi AB, CD; o ciò che è lo stesso che oltre alle

115.



condizioni precitate il centro di gravità si trovi nello stesso piano normale alla comune intersezione I dei 2 piani coi 2 centri di gravità delle basi AB, CD; e che di più il punto intersezione delle 3 normali ai piani elevati dai centri di gravità delle basi si trovi sulla verticale del centro di gravità.

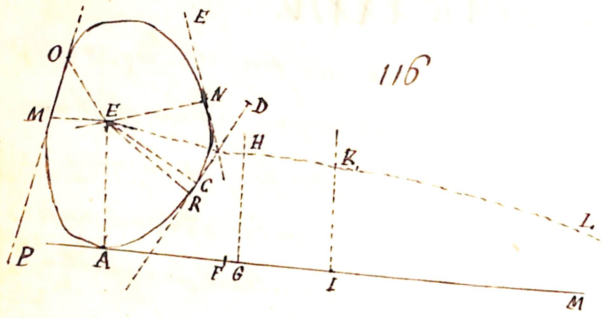
Finalmente faremo osservare (V fig a pag 285) che per l'equilibrio di un corpo DEH appoggiantesi su 2 superficie curve qualunque LDK MEN le condizioni di equilibrio sono le stesse, che quando alle 2 superficie si sostituiscono i 2 piani tangenti AB, BC nei punti D, E di contatto perchè per i punti di contatto le superficie si confondono coi loro piani tangenti - e che ci riserveremo ad esaminare più tardi l'equilibrio di un corpo appoggiantesi a 3 piani o a 3 superficie qualunque, quando allora avremo gli elementi necessarii per esaminare la questione.

(Venturoli 138 - 143)

LEZIONE XXXIV.

Applicazione del teorema generale enunciato nel fine della Lez 32 a varii casi particolari – Cilindro a base qualunque – Cilindro ellittico – Prisma – Applicazione all'equilibrio di uno o più fluidi in un vaso – all'equilibrio di un punto attirato da uno o più centri d'attrazione secondo una certa legge – Equilibrio di un corpo su 2 piani e ritenuto per un punto – Applicazione alle macchine di proiezione.

NOI abbiamo enunciato nel fine della Lez 32 questo teorema generale sull'equilibrio dei corpi pesanti: Un corpo o grave o sistema qualunque di gravi è in equilibrio tutte le volte che l'altezza del suo centro di gravità è massima o minima: l'equilibrio essendo instabile nel 1° caso, stabile nel 2°. Questo teorema di cui aggiungiamo ad altra occasione di dare la dimostrazione è facilmente applicabile all'equilibrio di un semplice punto sopra una superficie curva. Cerchi allora il centro di gravità del punto confondersi col punto stesso, la sua altezza sarà massima o minima, quando sia massima o minima l'altezza del punto, ossia quando questo si troverà in un maximum o minimum della superficie. Quando un grave qualunque è rivaluato sopra di un piano orizzontale, il suo centro di gravità è obbligato a rimanere sopra una certa superficie: poichè facendo rotolare il corpo in varii sensi il centro di gravità percorrerà tante linee curve da moltiplicate all'infinito formano la superficie curva in questione. Il grave sarà in equilibrio stabile su tutti quei punti per cui l'ordinata di tal superficie è minima, instabile su

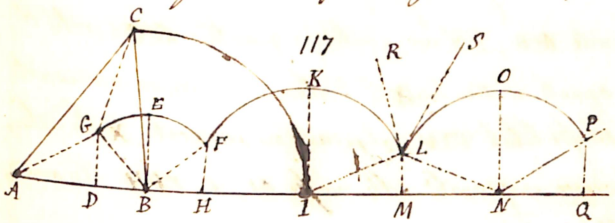


116

quelli per cui l'ordinata è massima. Per fare un esempio scegliere una curva MN la base di un cilindro retto e sia E il suo centro di gravità; facendo rotolare questo cilindro sul piano AM il punto E descriverà una curva che facilmente si può costruire. Proposto proposto avere la posizione di E quando il punto B è a contatto col piano basterà perciò condurre la tangente BD e abbassare EC ad essa ortogonale. Sviluppato l'arco AB in AF, e portato FG = BC, elevata GH = GE sarà evidentemente H il punto corrispondente della curva. È manifesto che quando il raggio vettore EB è massimo o minimo la tangente BD è perpendicolare a quello, onde allora le 2 rette BE, CE coincidono. In questo caso GE sarà ancora un massimo o minimo. Il corpo sarà in equilibrio quando la tangente DB è ortogonale al raggio EB; questo avvenendo quando GE è massimo o minimo. Segue da ciò che il cilindro è in equilibrio quando l'altezza del suo centro di gravità è massima o minima. Se per es. la curva MN fosse un ellisse, e dunque solido fosse omogeneo, il centro di gravità risponderebbe al centro dell'Ellisse; facendolo girare intorno esso descriverebbe una curva di figura ondulata di cui i minimi corrisponderebbero ai vertici dell'asse minore, i massimi a quelli dell'asse maggiore. In questi ultimi l'equilibrio sarebbe instabile, negli primi stabile. Pure l'equazione della curva MN non è difficile trovare quella della curva EHKL: nel caso in cui MN fosse un circolo, EHKL sarebbe una retta parallela ad AM.

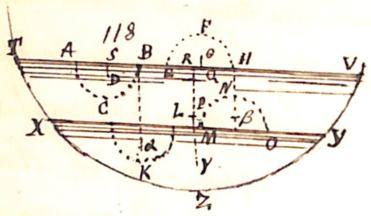
Tutti i punti come N che hanno un punto di inflessione come K nella curva descritta da E mantengono su se stessi il corpo in equilibrio

instabile. Quei punti come M, O che hanno una tangente comune danno
per punto di regresso per la curva EL; ove le 2 tangenti fanno fra loro un an-
golo. Il che si può agevolmente vedere nel caso semplicissimo del triangolo ACB
(o prima triangolare che sia lo stesso) che si faccia rotolare sulla AQ. Il centro
G di gravità percorrerà la
linea GKP formata di 3 ar-
chi circolari che facilmente
si possono costruire osser-
vando che se B, I, N; sono
i luoghi ove vengono ad



applicarsi i 3 vertici B, C, A, si avrà BF = BG, IL = GC, NP = GA; di
più FBH = GBC, LIM = GCA, PNQ = GAB. I punti G, F, L, P. in cui si trova
G quando il triangolo è nelle tre posizioni minime, epperò su loro il triangolo è
in equilibrio stabile; di più siccome per rompere questo equilibrio bisogna far
descrivere al centro di gravità gli archi GE, FH, LC, così si annunzia con questo
di regresso ai punti di equilibrio stabile. L'angolo delle 2 tangenti KL, LS è
eguale al supplemento di ILN = GCA. Poichè IN = CA, IL = GC, LN = AG.
I punti E, K, O, massimi danno i punti di equilibrio instabile, perchè
difatti quando il centro G passa per gli stessi, il triangolo si appoggia sui pro-
prii vertici.

Il teorema di cui sopra è dimostrato si applica ancora ad un sistema di forma
variabile. Poichè si insegna che un tal sistema non rigido è solo in equi-
librio allorquando il suo centro di gravità è ad altezza massima o minima.
La sua più notabile applicazione è quella che se ne fa all'equilibrio dei
liquidi stagnanti in un vaso qualunque TZV. Difatti supponiamo che la



superficie TV del liquido sia orizzontale e paragonasi questa pure piano dei momenti. Condotta una porzione qualunque di esso come ACB di massa $= m$ e si collochi sopra di un altro largo qualunque pure es. in EFH. Sia M la massa del liquido totale meno la parte ACB, P il suo centro di gravità; D, C i centri di gravità delle masse ACB, EFH eguale ad m. Sia x la distanza del centro comune delle 2 masse ACB, ed M, o della massa totale TZV dal piano dei momenti, x_1 la distanza da questo piano dal centro comune di gravità delli masse M, e. EFH. Noi avremo dalla teoria delle forze parallele

$$x = \frac{M \times PR + m \times SD}{M+m} \qquad x_1 = \frac{M \times PR - m \times CQ}{M+m}.$$

contando come positive le distanze dal piano TV in giù. Or qualunque sia m, è chiaro che si ha sempre $x > x_1$; ossia il centro di gravità della massa TZV colla superficie orizzontale è più basso che quello della stessa massa disposta in TZVFC colla superficie suprema disposta in altro modo. Dunque quando la superficie suprema è orizzontale il centro di gravità è il più basso possibile, in questo caso solo il liquido è in equilibrio, ed in equilibrio stabile.

Quando in un vaso si abbiano 2 liquidi TZV, XZY, per il loro equilibrio è dapprima necessario che la superficie suprema TV sia orizzontale; di più la superficie XY di separazione sia orizzontale. Posto ciò il liquido inferiore più denso del superiore, è manifesto che se tolta una parte IKL la si colloca sopra XY in MNO, la parte del liquido superiore che occupava MNO viene ad empiere il vano IKL. Sia il volume $IKL = MNO = v$, $\alpha, \beta,$ i loro centri di gravità; γ il centro di gravità della massa XIKLMOYZ, P quello della massa XITVYONMLI cioè della massa superiore meno MNO; e siano v, v' i rispettivi volumi; p, p' le densità del liquido superiore, e quello

dell'inferiore. Nel caso in cui le 2 superficie TV, XY, siano orizzontali si ha

$$X = \frac{\delta_1 V' \times PR + \delta_1 V \times H\beta + \delta' V \times \alpha B + \delta' V \times RY}{\delta V' + \delta V + \delta' V + \delta' V}$$

$$X = \frac{\delta V' \times PR + \delta'' V \times RY}{\delta V' \times \delta V + \delta' V + \delta'' V} + \nu \frac{\delta \times H\beta + \delta'' \times B\alpha}{\delta V' + \delta V + \delta' V + \delta' V}$$

Cangiando come abbiamo accennato le 2 masse IKL, NMO di luogo reciproco i loro centri di gravità avranno ancora le stesse posizioni che aveva quello del liquido prima occupato lo stesso spazio, cosicchè sarà.

$$X_1 = \frac{\delta V' \times PR + \delta' V \times RY}{\delta V' + \delta V + \delta V' + \delta'' V} + \nu \frac{\delta \times B\alpha + \delta' \times H\beta}{\delta V' + \delta V + \delta' V + \delta'' V}.$$

Supponiamo che sia $\delta'' > \delta$ ossia $\delta'' = \delta + \omega$. Noi avremo l'espressione $\delta \times H\beta + \delta'' \times B\alpha = \delta \{H\beta + B\alpha\} + \omega + B\alpha$. Chiamando L_1 il valore della espressione X_1 la massa totale dei 2 liquidi si avrà

$$X = L_1 + \frac{\nu\delta}{\mu}\{H\beta + B\alpha\} + \frac{\nu\omega}{\mu} B\alpha \quad \text{ed} \quad X_1' = L_1 + \frac{\nu\delta}{\mu}\{H\beta + B\alpha\} + \frac{\nu\omega}{\mu} H\beta$$

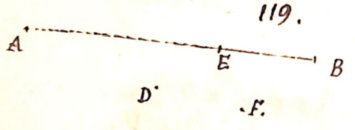
Ora evidentemente $B\alpha > H\beta$; dunque $X > X'$; dunque quando XY è orizzontale il centro di gravità sarà il più basso possibile nel caso che $\delta'' > \delta$; quindi tale dovrà essere XY perchè l'equilibrio succeda. Sia ora $\delta > \delta'$, evidentemente basterà fare ω negativo. Se è negativo sarà allora sempre $X' > X$ perchè $H\beta < B\alpha$. Dunque il centro di gravità quando XY è orizzontale si troverà ad un massimum di altezza, ed in equilibrio instabile la massa dei 2 liquidi. Mentre nel 1° caso l'equilibrio era stabile trovandosi ad un minimum d'altezza il centro di gravità. Quando $\delta = \delta'$, $\omega = 0$ $X = X'$ in tal caso l'equilibrio è neutro. Riguardo poi alla terza ripetizione dedurre da se quei liquidi sono in un vaso, essi saranno in equilibrio tutte le volte che le loro superficie di separazione saranno tutte orizzontali, che questi equilibrii saranno

instabile, salvo che nel caso in cui ciascun liquido abbia sopra di se tutti quelli che meno di lui sono densi, e sotto, tutti quelli che lo sono di più.

L'equilibrio è stabile o instabile o anche non solo quando le forze sollecitanti sono fra loro parallele, ma qualunque sia il sistema di forze che sollecitano un corpo il suo equilibrio può avere questi o altri. Sia per es. E un punto attirato da 2 centri A, B d'attrazione: supponiamo che le attrazioni loro siano in ragion diretta di una certa potenza della distanza; cioè se f sia l'attrazione di A su E posto alla distanza 1, alla distanza AE sia $f \times \overline{AE}^n$; e similmente l'attrazione di B su E alla distanza EB sia $f' \times \overline{BE}^n$. Perchè l'equilibrio sussista bisogna che $f \times \overline{AE}^n = f' \times \overline{BE}^n$ o $f \times \overline{AE}^n = f'(AB - AE)^n$, onde $AE \sqrt[n]{f'} = AE \sqrt[n]{f} - AE \sqrt[n]{f'}$:

$$AE = AB \frac{\sqrt[n]{f'}}{\sqrt[n]{f} + \sqrt[n]{f'}}$$

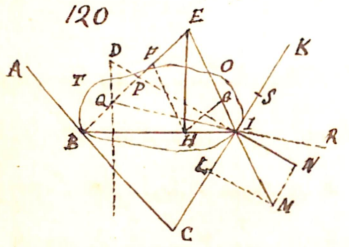
Fig. 119.



Se n è positivo, l'attrazione crescerà colla distanza: onde se si allontani un poco E da A l'attrazione di A crescerà diminuendo quella di B. Dunque E sarà più attratto da A che da B e ritornerà in E primitiva posizione dopo certe oscillazioni. L'equilibrio sarà dunque stabile; ma se n sia negativo, allontanando E da A ed avvicinandolo a B decrescerà l'attrazione di A, crescerà quella di B, e rotto così l'equilibrio il punto cadrà su B. Al contrario avvicinando il punto da E verso A, rotto parimente l'equilibrio esso precipiterà sopra A. Lo stesso accadrebbe ove più di 2 fossero i centri di attrazione A, B, C, D, E. Perciò supposto il punto in equilibrio, non lo si potrà smuovere da una certa posizione senza

avvicinarlo ad alcuni punti e allontanarlo da altri; e senza che tenda a ritornare ove era eppure se ne allontani indefinitamente. L'equilibrio sarà sempre stabile quando n sia positivo e instabile nel caso contrario. Nel caso in cui le attrazioni cangino in repulsioni l'equilibrio sarà instabile per n positivo, e stabile per n negativo.

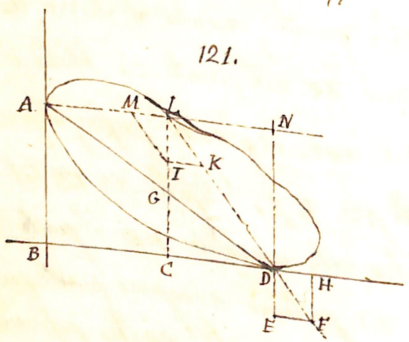
Noi abbiamo fin ora considerato l'equilibrio dei corpi pesanti supponendoli liberi, e senza alcun ostacolo da quello dei sostegni. Nel considerare l'equilibrio dei corpi pesanti vincolati a qualche ostacolo bisogna cercare di far sì che il peso resti in un certo modo venga dagli ostacoli totalmente distrutto. Siccome poi i vincoli assoggettano già il corpo a certe condizioni impedendogli certi movimenti, le condizioni di equilibrio di tali corpi sono e devono esser in minor numero. Così se consideriamo l'equilibrio del grave BIOI fra i 2 piani AC CK, basterà se si suppone il medesimo invariabilmente situato in E, che le 2 componenti della gravità cadano ad elidersi, contro il piano AC e il punto I. Helle si ottiene tutta volta che la verticale EH del centro di gravità passa pel piano normale ai 2 piani AC, CK, condotti per B, I. Risulti sia EH tal verticale; trasportando in E suo incontro colla normale BE il punto di applicazione del peso del corpo, e tirata EI potremo scomporre questo peso nella EF normale ad AC e da questo distrutta: e nella EG che possiamo trasportare sulla sua direzione in IM e scomporre nelle 2 IN, IL, di cui



la prima venga distrutta dal piano CK, la seconda dal punto I dia origine a che il corpo scorrendo lungo CK. Nel caso in cui la verticale EH passi tra P ed I la componente IL è diretta all'ingiù; quindi bisogna che I sia impedito dallo scorrere verso quella parte; Quando la EH passa per l'incontro delle normali BP, IP, la componente IL è nulla, quindi non è necessario che I sia ritenuto, che il corpo trovandosi nel caso già considerato sia in equilibrio di per sè; se la EH passa dall'altra parte di P come in DQ, tutta QI, il peso si scomporrà nelle QB, QI: la quale ultima si scompone in 2 altre dirette secondo IN e IS. Ma l'equilibrio in questo caso basta che sia impedito dallo scorrere all'insù. Se il corpo fosse una semplice sbarra BI ritenuta in I basterà per l'equilibrio che essa sia tutta intera contenuta in un piano normale ad AC, CK, e passante per B, I. Date poi le inclinazioni dei 2 piani all'orizzonte, le posizioni dei punti E ed I e il peso del corpo è facile determinare le 2 pressioni IF IL, IN, per un semplice calcolo trigonometrico.

Sia come caso particolare a cercare l'equilibrio del grave AD appoggiato a 2 piani AB, BD uno orizzontale l'altro verticale. È manifesto che i 2 punti A, D, sono liberi per l'equilibrio si richiede che il centro di gravità del corpo sia nella verticale DN, nel qual caso la pressione nel piano BA è nulla, e quella nel piano DB è eguale al peso del corpo. Se dunque il centro di gravità sia per es. in G è necessario, affinchè il corpo non scorrendo giù sia ritenuto in D. Difatti

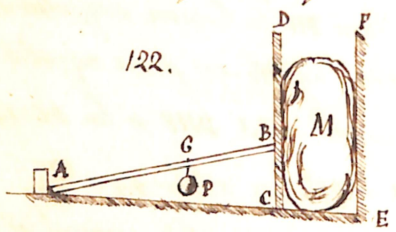
121.



in questo caso condotta la verticale GL del centro di gravità non possiamo trasportare il peso del corpo in I, e tratta LD scomponi questo peso LI nelle 2 LM, LK; LM sarà la pressione sul piano AB, quanto a LK trasportata in DF la si risolve nelle DH, DE. Sarà DH la tensione orizzontale che tende a svellere l'ostacolo D, DE la pressione sofferta dal piano orizzontale AD. Per l'evidente eguaglianza dei triangoli MLI, DHF si ha DE=LI eguale al peso del corpo = P; LM = DH = P tang φ se tang φ = $\frac{DC}{LC}$. e φ = CLD. Dunque 1.° la pressione sul piano orizzontale è eguale al peso del corpo. 2.° la pressione contro la parete verticale è eguale al peso del corpo per tang φ; è eguale alla resistenza opposta dall'ostacolo D alla forza che tende a svellerla.

Quando G è sulla DN, tang φ = 0, LM = 0 cosa del resto evidente; quando G è dalla altra parte della ND, tang φ è negativo, quindi LM è negativa. Il che significa che allora il corpo invece di premere nel senso LA il piano verticale, urge nella forza che tira da L verso A il corpo perchè non cada su D. Finalmente quando G è nel piano BH, la pressione diventa infinita; il che indica che in tal caso non può aversi pressione, non esservi equilibrio; e difatti non avendo noi fatto entrare nei nostri calcoli la resistenza del piano PA bisogna da ciò far astrazione; ed effettivamente si vede ben impossibile ottenere in tal caso equilibrio, non che pressione; poichè il corpo non sarà sostenuto e cadrà al basso. Ma quanto più è grande l'angolo GDB tanto più grande sarà la pressione che si ottiene sul piano AB, perchè l'angolo φ suo complemento tanto più si avvicinerà all'angolo retto, e tanto più aumenterà tang φ. Di qui un mezzo assai semplice per ottenere

con un piccolo peso una pressione enorme. Difatti se EF, AE si vengano parte-
disistenti e A un ostacolo pur resistente, DC un piano che possa scorrere vertical-
mente, M la massa a comprimersi, basterà caricare il corpo AB rigido di un peso
P in G. Esso farà scorrere il piano DC
e lo accosterà ad EF con tanto maggior
forza quanto più piccolo è l'angolo BAC.
Difatti (v. la fig a pag 236) se il corpo
AB si muta in una retta AGD col centro
di gravità in G la pressione sua sul piano AB sarà P tang φ. Or se AD=a
GD=b, sarà tang φ = $\frac{CD}{AC} = \frac{CD}{AB}$; e poichè AB : a :: GC : b sarà
AB = GC $\frac{a}{b}$ tang φ = $\frac{b}{a} \cdot \frac{CD}{GC} = \frac{b}{a}$ CT CDG : è la pressione su AB di-
venta P $\frac{b}{a}$ CT CDG. Quanto più CDG è piccolo tanto maggiore sarà
la pressione. La quale oltre a ciò essendo ancora proporzionale a $\frac{b}{a}$
e a P cioè che la massa M si potrà comprimere quanto si vuole
impiccolendo l'angolo BAC, aumentando il peso P e avvicinando il punto
suo G di applicazione al punto B; ciò facendo astrazione dal peso della
trave, alla quale se è omogenea di peso = P' (a cui però il centro
di gravità nel suo mezzo e quindi portante $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$) si deve la pressione
$\frac{P'}{2}$ CT CDG da aggiungersi a quella dovuta al peso G



(Venturoli 143-144 Poisson 346-349.)

LEZIONE XXXV.

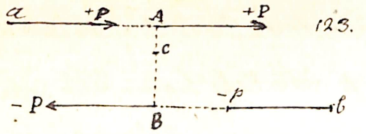
Coppia – Intensità, braccio, piano, momento, verso della coppia.

Tre lemmi preliminari sulla trasformazione delle coppie.

Riduzione di più coppie contenute in più piani paralleli ad una sola coppia

La teoria delle coppie è di grande utilità nello stabilire le condizioni di equilibrio di un sistema rigido sollecitato da forze qualunque che è uno dei problemi più generali della Statica. Essa è dovuta al Sig^r Poinsot, geometra del nostro secolo, che la sostituì alla teoria dei momenti di cui Eulero, ed i geometri a lui posteriori si erano valsi per la risoluzione del medesimo problema.

Alcuni lemmi e definizioni preliminari. Sia la coppia $+p-p$ composta delle due forze ap, bp eguali, parallele, contrarie ma non opposte; noi potremmo sempre condurre una retta AB perpendicolare alla loro comune direzione e trasportare i punti a, b d'applicazione in A. B. Noi potremo dunque considerare il sistema nella figura PBAP in cui le forze sono applicate all'estremità della retta AB. La lunghezza AB comune perpendicolare alle 2 direzioni dicesi braccio della coppia. Si chiama intensità della coppia l'intensità di ciascuna delle forze $+P, -P$, e momento della coppia la somma dei momenti di rotazione delle 2 forze rispetto a un punto qualunque C del piano in cui si contiene la coppia, condotta per C la comune perpendicolare AB e considerato AB come braccio della coppia, siccome la due ~~coppia~~

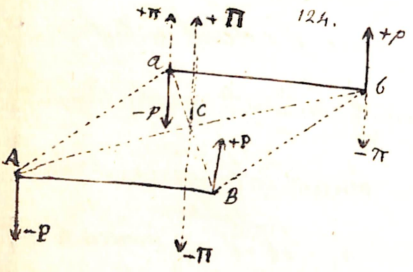


123.

rotazioni prodotte dalle 2 forze hanno lo stesso segno, sarà dimostrando μ il momento della coppia, $\mu = P \times CA + P \times CB = P(CA + CB) = P \times AB$. Il momento di una coppia è dunque il prodotto della sua intensità per il suo braccio.

L'espressione del momento della coppia sarebbe evidentemente anco la stessa quando il punto C non fosse frammezzo ad A e B, perchè allora le 2 rotazioni avrebbero segno contrario, e $CA - CB$ sarebbe anco stato $= AB$. Dicesi poi piano della coppia quello che passa per le rette in cui si contengono le due forze, e verso della coppia il verso in cui le due forze $+P, -P$ agiscono; onde nasce poi la distinzione in coppie cospiranti, ed opposte. Ciò posto nelle coppie si dimostrarono i seguenti Lemmi

Lemma I Una coppia si può trasportare comunque nello spazio parallelamente a se stessa senza che punto muti la sua azione. Quindi l'azione della coppia $+P - P$ è la stessa che quella della coppia $+p, -p$ dello stesso braccio della stessa intensità, ed in cui le direzioni delle forze e del braccio sono parallele alla direzione delle forze e del braccio della 1ª

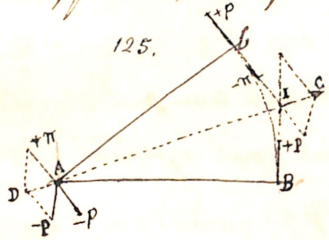


Ripeto senza punto turbare lo stato del corpo sollecitato dalla coppia $+P, -P$ si può nei punti a e b tali che ab sia eguale e parallela ad AB applicare le forze $+\pi, -p + p, -\pi$ di cui le 2 $+\pi, -p$ sono ambe parallele ed eguali alle forze $+p, -P$. eppero opposte, e similmente le 2 altre $+p, -\pi$. L'effetto delle 2 forze $+P, -P$ sarà dunque eguale a quello delle 6 forze $+P, -P, +p, -p, +\pi, -\pi$. Cioè si Ab, Ba, la figura ABba essendo un parallelogramma sarà $Ac = cb, Bc = ca$.

Ora alle due forze $+\pi, +P$ applicate in a, B si può sostituire $+\Pi = P+\pi = 2P$ applicata in C mezzo di aB; similmente alle 2 forze $-P, -\pi$, applicate in A, b si può sostituire $-\Pi$ applicata in C ed eguale a $-\pi, -P = -2P$. Le 2 forze $+\Pi, -\Pi$ saranno dunque eguali ed opposte e si faranno equilibrio. Dunque si faranno altresì equilibrio le 4 forze $+\pi, -\pi, +P, -P$, da cui $+\Pi, -\Pi$ risultano. Possiamo dunque toglierle e rimarranno le sole forze $+P, -P$: il cui sistema in conseguenza equivarrà a quello delle forze $+P, -P$, loro eguali e parallele e di egual braccio.

Lemma II *La direzione di una coppia si può comunque cangiare nel suo piano purchè la sua intensità ed il suo braccio non cangino; cosicchè per es alla coppia $+P, -P$ si può sostituire la $+P - P$ purchè sia $Ab = AB$. $P = p$*

125.

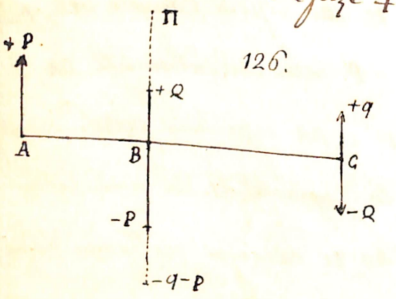


Difatti se la coppia sollecitante sia $+P - P$ posso nei punti A, b applicare le 4 forze $-P, +\pi, +P, -\pi$ le quali dirette ortogonalmente ad Ab e tutte eguali a P si faranno equilibrio. Or se si prolungheranno applicate in I
ino BP, $b\pi$ fino al loro incontro in I, trasportandole sulle loro direzioni, cosicchè la risultante delle $b\pi$, BP o $-\Pi + P$ sarà Ic che bisseca l'angolo bIB, essendo $\pi = P$. Similmente la risultante delle $+\pi - P$ sarà evidentemente DA, e siccome l'angolo $\pi AP = bIB$, sarà $DA = CI$; e DA bisecherà pure l'angolo πAP, ~~$A\frac{*}{I}$ onde AD Ic saranno sulla~~ tirando la diagonale AI del quadrilatero $AbIB$ essa bisecherà i 2 angoli in $I.A$; onde AD, Ic saranno sulla sua direzione

ed essendo eguali ed opposte si faranno equilibrio. Dunque l'azione totale delle 6 forze $+P_1 - P, +P_1 - P, +\Pi_1 - \Pi$ due è eguale a quella delle $+P_1 - P$ si ridurrà a quella delle $+P_1 - P$ poichè le 4 forze $+P_1 - P + \Pi - \Pi$ ridotte alle DA, IC si faranno equilibrio. Dunque la coppia $+P_1 - P$ equivale alla $+P_1 - P$. Essendo la $+P_1 - P$ si può trasportare parallelamente a se stessa nel suo piano che è il piano della $+P_1 - P$; si concluderà che è lecito trasportare e mutare di direzione una coppia nel proprio piano comunque; purchè non varii della medesima l'intensità ed il braccio.

Lemma III. Ad una coppia qualunque $+P_1 - P$ può sostituirsi un altra qualunque $+Q_1 - Q$ di diversa intensità e braccio posta nello stesso piano, purchè i momenti delle 2 coppie siano eguali.

Sia difatti la coppia $+P_1 - P$ di braccio a: prendo nel prolungamento di AB la lunghezza $BC = b$; alle sue estremità applico 4 forze $+Q_1 - q. + q - Q$ due 2ª 2 si equilibrano intorno a B, C. L'equilibrio di queste 4 non muterà lo stato del corpo; se ora le prendo tutte 4 fra loro numericamente eguali e parallele a $+P$. $-P$; di più prendo Q tale che $Pa = Qb$ o $Q = P\frac{a}{b}$; noi avremo in B applicate da un lato la forza $+Q$, dall'altro la forza $-P$ e la forza $-q$, ossia la forza $-(P+q)$ Ma la risultante delle 2 forze $+P + q$ è la forza $\Pi = P+q$ applicata in un punto tale che $BA \times P = BC \times Q$. Il quale punto è precisamente B dove s'applica la forza $-(P+q) = -\Pi$ Dunque le 4 forze $+P_1 + q_1 - P_1 - q$ equilibrandosi intorno a B restano le 2 forze $+Q - Q$ che



formano una coppia di intensità Q e di braccio b. La sua intensità pel braccio a darà per suo momento Qb che per ipotesi = Pa, essendosi fatto B tale che Q + BC = P + BA. Siccome poi si può trasportare la coppia +Q, −Q comunque nel suo piano, concluderemo che 2 coppie, poste in un piano che abbiano lo stesso momento sono identiche quanto al loro effetto.

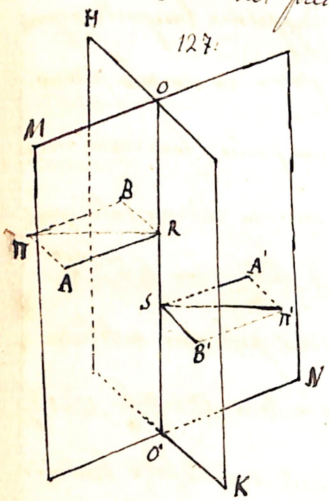
Teorema. Date tante quante si vogliono coppie in piani fra loro paralleli esse possono ridursi ad una sola coppia, il cui momento è eguale alla somma dei momenti delle coppie date. Difatti noi possiamo dapprima trasportare queste coppie parallelamente a loro stesse finchè vengano a giacere in un solo piano (Lemma I); poi possiamo farle giacere in questo piano finchè i loro bracci diventino tutti paralleli (Lemma II) Ma noi possiamo ancora ridurre tutte queste coppie ad aver bracci eguali ad una lunghezza data a Difatti siano b, b', b'', b'''... i bracci delle coppie $(+P, -P)\ (+P', -P')\ (+P''', -P''')$.... noi possiamo sostituirvi (Lemma III) le coppie di braccio a e di intensità rispettiva $Q = P\frac{b}{a}$, $Q' = P'\frac{b'}{a}$ $Q'' = P''\frac{b''}{a}$ ---- Onde poi trasportando parallelamente a sè stessi, i bracci di tutti i sistemi finchè tutti vengano a coincidere in uno, le direzioni delle forze applicate alle estremità di quest'unico braccio coincideranno; onde noi avremo una nuova ed unica coppia, di cui il braccio sarà a, e l'intensità sarà $Q + Q' + Q''$ -- ovvero $\frac{Pb}{a} + \frac{P'b'}{a} + \frac{P''b''}{a} + \ldots = \frac{Pb + P'b' + P''b'' + \ldots}{a} = \frac{\Sigma Pb}{a} = \frac{\Sigma\mu}{a}$. essendo μ il simbolo del momento di una qualunque delle coppie date. Moltiplicando per il braccio a questa intensità si avrà il momento della coppia

risultante: e sarà chiamando b il M. $M = a\frac{\Sigma p_i}{a} = \Sigma p_i$. Dunque ecc.

Composizione delle coppie – Composizione di 2 coppie.

Composizione di un N.° qualunque di coppie e determinazione analitica della coppia risultante.

Sia nel piano MN una coppia di braccio a e d'intensità P, nel piano HK facente con MN un angolo qualunque abbiasi una 2ª coppia di braccio b e di intensità Q. Se noi prendiamo sulla comune intersezione oo' dei due piani una lunghezza $RS = 1$ noi potremmo mutare la coppia $+P, -P$ in un altra il cui braccio sia RS e il cui momento sia pure Pa; perciò basta che le forze RA, SA' che noi poniamo ortogonalmente ad RS, in R, S siano eguali a $\frac{Pa}{1} = Pa$. Similmente alla coppia $+Q-Q$ del piano HK è lecito sostituire la coppia di braccio $RS = 1$ e d'intensità $RR = SB' = bQ$. Abbiamo ora da eseguire le 4 nuove forze in piani ortogonali ad oo' si compone AB con RA in $R\Pi$, e B's con AS in $S\Pi$ primieramente le 2 forze π, π' saranno eguali e parallele contrarie ma non opposte, onde dalle 2 coppie date risulterà una nuova coppia $+\pi_1, -\pi$: 2° l'angolo $ARB = B'S'A'$ sarà eguale all'angolo che fanno fra di loro i 2 piani. Il braccio della coppia $+\pi_1, -\pi$ sarà evidentemente eguale a 1, e la sua intensità si otterrà ancora colle stesse formole con che s'ottengono le risultanti dei sistemi di 2



forze concorrenti in un punto, perchè la forza Π è la diagonale del parallelogramma di lati PA e QB che comprendano fra loro un angolo eguale a quello dei due piani; e il piano della coppia risultante dividerà ancora l'angolo dei piani delle coppie componenti nello stesso modo che la diagonale $A\Pi$ divide l'angolo BRA.

Per via di successive composizioni si vede come si possa trovare il momento ed il piano di una forza unica equivalente a qualunque numero di coppie date poste in piano qualunque. La qual composizione è agevolata grandemente dalle seguenti considerazioni.

Noi chiamiamo asse di una coppia una perpendicolare elevata in qualunque punto al suo piano: perchè noi possiamo immaginare nel piede di questa perpendicolare trasportato il punto di mezzo del braccio della coppia, che tenderebbe così a far girar il braccio attorno a quell'asse. Questa perpendicolare s'immagini terminata al piano della coppia; così che l'asse diventerà una perpendicolare elevata da un lato del piano della coppia. La parte o il lato del piano, da cui si eleva la perpendicolare è tale che tutte le coppie operate da un punto del loro asse debbono sembrar volte nel medesimo verso; dimodochè se una coppia ha un verso, l'asse si elevi da un lato del piano; se la coppia ha il verso opposto, l'asse si elevi dall'altra parte. La lunghezza dell'asse poi si prende a partire dal suo piede numericamente eguale all'intensità della coppia.

Ciò posto elevansi da un punto qualunque della comune intersezione OO' 2 perpendicolari eguali ai momenti delle coppie $+P,-P$; $+Q,-Q$ che saranno evidentemente gli assi delle 2 coppie equivalenti a quelle due cioè AA', BB' di braccio 1 e di intensità eguali ai momenti delle $+P,-P$; $+Q,-Q$. L'angolo

di queste 2 perpendicolari sarà evidentemente eguale all'angolo dei due piani MN, HK. Le loro lunghezze essendo eguali a RA, RB segue da considerando quei 2 assi come 2 forze, la diagonale del parallelogrammo su esso costruito sarà 1° eguale alla diagonale AΠ; 2° questa diagonale sarà ortogonale al piano della coppia $+\Pi, -\Pi$, onde essa sarà precisamente l'asse della coppia risultante. Onde questo notabile teorema; che se si considerano gli assi di 2 coppie in diversi piani come 2 forze, la risultante di queste 2 è l'asse della coppia risultante dalle 2 coppie date, qualora esse abbiano il braccio 1. Ma gli assi delle 2 coppie AA' BB' sono eguali ai momenti delle coppie $+P, -P'$, $+Q, -Q$; onde date 2 coppie in piani qualunque, se su un punto della comune intersezione si elevano 2 perpendicolari ai 2 piani, eguali respettivamente ai momenti delle 2 coppie, la diagonale del parallelogrammo su esse compreso rappresenterà in lunghezza e in direzione l'asse della coppia risultante, il cui momento sarà numericamente eguale a cotal diagonale.

Egli è evidente che se avessimo una 3ª coppia in un 3º piano, facendo coincidere le 3 perpendicolari che servono di assi nel punto comune intersezione dei 3 piani, la diagonale del parallelepipedo costrutto sovra le tre tali assi rappresenterebbe in direzione l'asse della coppia risultante delle 3 ed il lunghezza il momento della medesima. E così generalmente, date quante si vogliono coppie giacenti in piani diversi, si trasportino questi piani parallelamente a se stessi finche tutti coincidano in un punto; elevati per questo punto gli assi di tutte le coppie date, si portino sopra di essi tante rette respettivamente eguali ai momenti

delle coppie, e considerandoli come forze se ne trovi la risultante. Questa coincidera con l'asse della coppia unica equivalente a tutte le coppie date, e la sua grandezza sara' eguale al momento di questa coppia.

Cosi' e' ridotto il problema della composizione delle coppie a quello della composizione delle forze. Sara' ora facile eseguire analiticamente queste operazioni. Risulti cioe' dapprima 3 coppie $(+P,-P)$; $(+Q,-Q)$; $(+R,-R)$ poste in piani paralleli ai piani yz, xz, xy; se noi prendiamo l'origine o per comune intersezione dei 3 piani delle coppie trasportate parallelamente a loro stessi, l'asse della coppia $(+P,-P)$ sara una lunghezza Pa portata sull'asse x a partire dall'origine, e cosi' delle altre 2 l'asse sara' la lunghezza Qb portata sull'asse y, e Rc portata sull'asse z. Componendo questi 3 assi avremo per asse della coppia risultante e quindi pel suo momento

$M = \sqrt{Pa^2 + Qb^2 + Rc^2}$ - e per la sua direzione $\cos\lambda = \frac{Pa}{M}$; $\cos\mu = \frac{Qb}{M}$; $\cos\nu = \frac{Rc}{M}$. Il piano della coppia fara' quindi coi 3 piani coordinati gli angoli $\cos(\widetilde{x,y}) = \frac{Rc}{M}$ $\cos(\widetilde{y,z}) = \frac{Pa}{M}$ $\cos(\widetilde{x,z}) = \frac{Qb}{M}$ dove $\cos(\widetilde{x,y})$ indica il coseno dell'angolo che fa il piano della coppia risultante col piano xy e cosi' degli altri angoli.

Viceversa Data una coppia di momento M giacente in un piano che faccia coi 3 piani coordinati gli angoli dati dai coseni

$$\cos(\widetilde{x,y}) = \zeta, \quad \cos(\widetilde{y,z}) = \xi, \quad \cos(\widetilde{x,z}) = \eta$$

noi avremo la sua scomposizione in 3 coppie poste nei 3 piani coordinati di momenti rispettivamente X, Y, Z. dalle formole

$$X = M\cos(\widehat{Y,Z}) = M\xi, \quad Y = M\upsilon, \quad Z = M\zeta$$

dove X è il momento della coppia posta nel piano yz e che ha suo asse sull'asse x, e così Y e Z sono i momenti delle coppie i cui assi giacciono sugli assi coordinati y e z. Siano dunque nei piani, i coseni dei cui angoli coi piani coordinati sono $\cos(\widehat{x,y}) = \xi'$; $\cos(\widehat{y,z}) = \xi'$; $\cos(\widehat{x,z}) = \upsilon'$

$\cos(\widehat{x,y}) = \xi''$ $\cos(\widehat{y,z}) = \xi''$ $\cos(x,z) = \upsilon''$

. . . .

coppia risultante coi 3 piani coordinati $M = \sqrt{(\Sigma Pa\xi)^2 + (\Sigma Pa\upsilon)^2 + (\Sigma Pa\zeta)^2}$

e quindi $\cos(\widehat{X,Y}) = \frac{\Sigma Pa\zeta}{M}$; $\cos(\widehat{Z,Y}) = \frac{\Sigma Pa\xi}{M}$; $\cos(\widehat{X,Z}) = \frac{\Sigma Pa\upsilon}{M}$.

Nel caso in cui alcuno dei coseni sia negativo per es il $\cos(X,Y)$ ciò indica che per veder girare la coppia risultante nel verso convenuto come positivo (che è quello secondo cui si vede girare percorrendo sull'asse Σ l'orografia collocandosi dalla parte del piano che quando la parte superiore dell'asse Σ e così degli altri. Volendo introdurre nelle formole precedenti i coseni degli angoli di tutti i piani delle coppie coi piani coordinati, basterà sostituire ai simboli ξ υ e ζ i loro valori, e si avrà.

$$M = \sqrt{[\Sigma Pa\cos(y,z)]^2 + [\Sigma Pa\cos(x,z)]^2 + [\Sigma Pa\cos(x,y)]^2}$$

$$\cos(\widehat{X,Y}) = \frac{\Sigma Pa\cos(x,\hat{y})}{M}; \quad \cos(\widehat{Z,Y}) = \frac{\Sigma Pa\cos(z,\hat{y})}{M}; \quad \cos(X,Z) = \frac{\Sigma Pa\cos(x,z)}{M}.$$

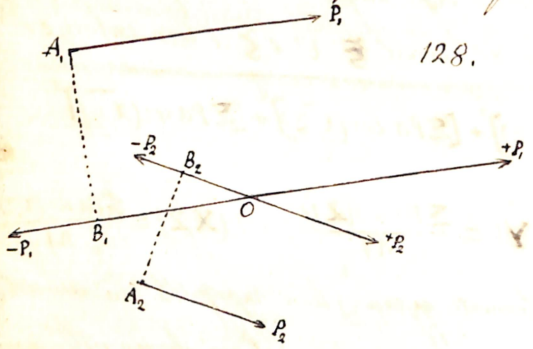
Da questa riduzione poi manifestamente appare, che è impossibile che un sistema di coppie si riduca ad una risultante unica, perchè già è chiaro che un sistema qualunque di coppie si riduce sempre ad una coppia, la quale non potrà mai equivalere ad una risultante unica.

LEZIONE XXXVII.

Riduzione di un sistema qualunque di forze ad una risultante unica che passi per un punto dato, più una coppia giacente in un piano che passa per lo stesso punto.

Casi in cui si ha equilibrio o risultante unica

Noi possiamo ora applicare di fronte il problema generale dell'equilibrio di un sistema rigido sollecitato da forze comunque applicate e dirette.



128.

Nei punti $A_1, A_2 \ldots$ fissati punti di un sistema rigido siano applicate le forze comunque dirette $P_1, P_2 \ldots$ Prendasi un punto qualunque O appartenente al sistema rigido, e che si possa supporre col medesimo invariabilmente connesso. Noi possiamo senza turbare lo stato del sistema applicare in O 2 forze eguali a P_1 ad essa parallele e per loro direttamente opposte $+P_1 - P_1$. Se ora consideriamo le forze $P_1 - P_1$ eguali parallele contrarie ma non opposte, esse formeranno una coppia di braccio $A_1 B_1$ il cui piano passa per O, e la cui intensità è P_1 Oltre a questa coppia avremo una forza $+P_1$ applicata in O eguale parallela e diretta nello stesso verso rispetto a P_1. Se noi ripetiamo quest'operazione rispetto alla forza P_2 applicata nel punto A_2, trasporteremo similmente questa forza nella coppia $+P_2 - P_2$ di braccio $A_2 B_2$ intensità P_2, agente nel piano

passante per O e per $A_2 P_2$; ed in una forza + P_2 eguale e parallela a + P_2 e diretta ancora nel medesimo verso. Si può concepire come ripetendo la stessa operazione per tutte le forze P_3, P_4 ... applicate nei punti dello spazio A_3, A_4 ... noi potremo al sistema delle date forze sostituire 2 altri sistemi; dei quali il 1° è composto di forze eguali, parallele a P_1, P_2 ... rispettivamente, dirette negli stessi versi e tutte applicate in O; il 2° si comporrà di altrettante coppie. Queste sono le date forze giacenti nei piani passati per questo, e per O d'intensità eguali rispettivamente a quelle di P_1, P_2 ... ed di bracci eguali alle perpendicolari abbassate da O sulle direzioni delle rispettive forze P_1, P_2 ...

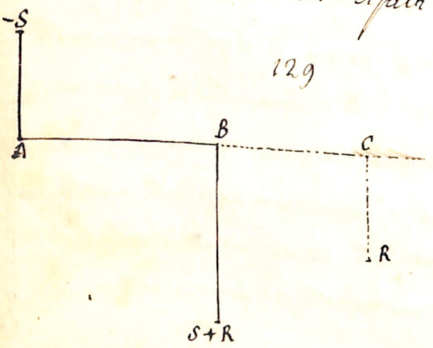
Ora egli è chiaro che il 1° sistema si può facilmente ridurre ad una risultante unica R. Similmente tutte le coppie formanti il 2° sistema si possono ridurre ad una sola coppia posta in un piano passante per O. Noi avremo dunque ridotto il sistema delle forze date ad una sola forza e ad una sola coppia. Siccome questa coppia si può mutare in qualunque modo nel suo piano, segue 1° che un sistema di forze qualunque può in infiniti modi ridursi ad una forza unica costante in valore e direzione ed in una coppia: la 1ª applicata in un punto dato, la 2ª posta in un piano passante per questo punto.

Essendo il punto O arbitrario la riduzione del sistema ad una sola coppia e ad una sola forza potrà farsi in infiniti modi. La forza unica sarà però sempre la stessa e avrà la stessa direzione qualunque sia O perchè le forze da cui risulta sarebbero sempre eguali e parallele a quelle del dato sistema. Ma la coppia risultante varierà perchè evidentemente le coppie componenti avranno la medesima rotazione ma diverso braccio. Quindi 2° un sistema di forze comunque applicate e dirette può in infiniti modi ridursi ad una forza unica applicata in un punto qualunque dello spazio e ad una coppia posta in un piano passante per quel punto.

Mutando la coppia S risultante nel proprio piano finchè un estremità del suo braccio venga a disporsi in O, la forza della coppia applicata in O potrà comporsi con R: Dunque 3° Qualunque sistema di forze può sempre in infinite guise ridursi a sole forze che generalmente non saranno tutte nel medesimo piano, e delle quali una si applichi in un punto preso ad arbitrio.

Se abbiasi dunque una forza e una coppia, ben esse non si potrà mai aver equilibrio Difatti se equilibrio vi fosse, la coppia equivarrebbe ad una forza unica eguale e direttamente contraria alla forza data, ad che non può essere. Dunque un sistema di forze qualunque non potrà mai esser in equilibrio se la coppia e la forza cui può ridurre non sono separatamente di momento e di intensità eguali a zero. Perciocchè n'per l'equilibrio di un sistema rigido e libero si richiede che tutte le forze trasportate co' loro punti d'applicazione in O parallelamente a se stesse si facciano equilibrio; e che tutte le coppie nate da questo trasporto si riducano a 2 coppie eguali e direttamente contrarie, ossia a 2 coppie poste in piani paralleli, di egual momento e aventi diverso contrario Siccome però la forza R e la coppia S. si riducono a 2 forze poste in piani differenti, segue che 2 coppie poste in 2 piani diversi non possono farsi equilibrio se non sono separatamente eguali a zero.

Ma supponiamo che la coppia S e la forza R invece di essere in piani differenti non paralleli siano nello stesso piano ovvero piani paralleli, allora si potranno ridurre ad una risultante unica. Difatti io posso far girare la coppia S nel proprio piano finchè il punto B d'applicazione della sua forza +S coincida col punto C ove s'applica la forza R, e che di più coincidano R e +S in direzione. Avremo allora il sistema delle forze parallele S+R e −S la cui risultante unica sarà +R applicata nel punto C tale



129

che AB : BC :: R : S. Premesse e provate che assenda un dato sistema di forze ammetta una risultante unica è necessario che la forza R sia parallela al piano della coppia S o ciò che è lo stesso che la R e la S giacciano o possano ridursi a giacere in un medesimo piano. Ciò equivale a dire, che la direzione della R, e l'asse della S devono fra di loro esser perpendicolari. Allora la risultante unica sarà eguale ad R e parallela ancora alla forza unica primitiva R; non sarà applicata in un punto tale che la sua direzione dista dalla direzione di R della quantità $BC = \frac{AB \times S}{R} = \frac{M}{R}$ se sia M il momento della coppia risultante S.

LEZIONE XXXVIII.

Riduzione a calcolo dei teoremi della lezione precedente — Formole per aver la risultante unica e la coppia unica che provengono dalla riduzione di un sistema qualunque di forze — Equazioni d'equilibrio — Condizione necessaria perchè tutto il sistema si riduca ad una forza unica. — Osservazione su questa condizione

ESPRIMEREMO ora analiticamente i ragionamenti ed i risultati della lezione antecedente. Siano dei punti dello spazio le cui coordinate rispetto ad un sistema di assi passanti per O (Vedi pag) sono x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 --- applicate le forze d'rispettiva intensità P_1, P_2, P_3 ecc

le cui direzioni facciano coi 3 assi ortogonali gli angoli rispettivi $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$; $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$; ... le cui supporremo applicate in O tanti sistemi composti di 2 forze eguali fra di loro e direttamente contrarie e delle intensità rispettive P_1, P_2 ... come nella lezione precedente fatto avremo un sistema di forze applicate in O e un sistema di coppie

Considerando il sistema delle forze applicate in O, vedremo che ciascuna di esse è eguale parallela e concorrente con una delle forze P_1, P_2 ... Onde per comporre questo sistema in una risultante unica si opererà come nella Lez IX. e facendo

$$P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \ldots = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots = \Sigma X$$

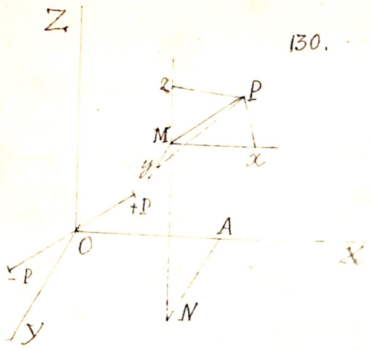
$$P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + P_3 \cos\beta_3 + \ldots = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots = \Sigma Y$$

$$P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 + P_3 \cos\gamma_3 + \ldots = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots = \Sigma Z$$

Si avrà evidentemente per quella forza che abbiamo chiamato R e gli angoli coi tre assi denomineremo λ, μ, ν. $R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}$.

$\cos\lambda = \frac{\Sigma X}{R}$; $\cos\mu = \frac{\Sigma Y}{R}$; $\cos\nu = \frac{\Sigma Z}{R}$.

È così primieramente determinata la forza unica R. Resta a determinare la coppia unica risultante dalla composizione di tutte le coppie nate dal trasporto delle forze P_1, P_2 ... all'origine. Considereremo una qualunque di queste forze P applicata in M. Fatta la operazione sopra indicata avremo la forza OP della quale già si è tenuto ragione e che fa parte del 1° sistema, e la coppia $(+ MP - OP)$ della quale non si contiene l'asse certo



Se noi immaginassimo scomposta questa coppia in 3 coppie contenute nei 3 piani coordinati, la rotazione prodotta dalla coppia medesima si scomporrebbe in 3 rotazioni intorno ai 3 assi; e i momenti sarebbero eguali ai prodotti delle intensità delle 3 coppie per il loro respettivi bracci (Lez XXXV) o ai momenti delle 3 coppie contenute nei 3 piani coordinati. Se noi dunque consideriamo la rotazione che le $AP, -OP$ tenderebbe ad imprimere al corpo intorno ad un asse, il suo momento sarà il momento della coppia componente data, contenuta nel piano perpendicolare a quell'asse. Per es. il momento di rotazione della coppia $+P, -P$ respetto all'asse z, eguaglierà i momenti delle 2 forze $+P, -P$ respetto all'asse Z e farà in modo la somma. Egli è chiaro che il momento di rotazione della forza $-P$ è zero respetto a qualunque degli assi; dunque considerando solo la rotazione prodotta dalla forza P intorno all'asse z, essa sarà eguale alla somma delle rotazioni prodotte intorno alle assi z dalle sue componenti secondo gli assi, M_x, M_y, M_z, respettivamente designate da X, Y, Z. Ma la rotazione prodotta da Z respetto all'asse z è nulla (Lez XXIX e XXX) e se x, y, z sono le coordinate di M. i momenti delle rotazioni di X, Y, Z. saranno Xy e $-Yx$ (considerando come positiva la rotazione da destra a sinistra guardando dalla parte positiva degli assi) Onde si conclude che il momento di rotazione della forza P respetto all'asse z o il momento della coppia componente

contenuta nel piano xy è $X_y - Y_x$.

Con un analogo ragionamento e come è evidente, dei momenti della coppia componente di $+P_1 - P$ contenuta nel piano zy è $Y_z - Z_y$; e quello della coppia componente di $+P - P$ posta nel piano zx è $Z_x - X_z$. Quindi tali eguali sono i momenti di rotazione della coppia $+P_1 - P$ (ossia dello stesso) della forza $+P$ proiettata sugli assi x ed y.

Ripetendo questa operazione per tutte le forze $P_1\ P_2\ P_3 \ldots$ noi avremo così nel piano xy tante coppie i cui momenti saranno

$$X_1 y_1 - Y_1 x_1 \ ; \ X_2 y_2 - Y_2 x_2 \ ; \ X_3 y_3 - Y_3 x_3 \ \ldots\ldots$$

nel piano zy i momenti delle coppie componenti saranno

$$Y_1 z_1 - Z_1 y_1 \ ; \ Y_2 z_2 - Z_2 y_2 \ ; \ Y_3 z_3 - Z_3 y_3 \ \ldots\ldots$$

e i momenti delle coppie componenti giacenti nel piano xz saranno

$$Z_1 x - X_1 z_1 \ ; \ Z_2 x_2 - X_2 z_2 \ ; \ Z_3 x_3 - X_3 z_3 \ \ldots\ldots$$

A tal somma è dunque ridotto il sistema delle coppie $+P_1 - P_1 \ ; \ +P_2 - P_2 \ \ldots$

Componendo in una tutte le coppie contenute in ciascuno dei piani coordinati, il momento di ciascuna delle risultanti eguaglierà la somma dei momenti delle sue componenti; cioè sarà semplicemente.

Momento della risultante contenuta nel piano $xy = \Sigma (X_y - Y_x)$

Idem $\ldots\ldots\ldots

coppia che avevamo chiamata S e ξ, ν, ζ. gli angoli del suo asse coi 3 assi coordinati facendo poi.

$$F = \Sigma(y_2 - z_y) \; ; \quad G = \Sigma(z_x - x_2) \; ; \quad H = \Sigma(x_y - y_x)$$

avremo $$M = \sqrt{F^2 + G^2 + H^2}$$

$$\cos\xi = \frac{F}{M} \; ; \quad \cos\nu = \frac{G}{M} \; ; \quad \cos\zeta = \frac{H}{M} \, ,$$

si vuole portano le regole della Leg XXXVI

E così completamente determinata la forza unica e la coppia a cui riesce ridurre ogni sistema di forze. Venendo poi alle loro condizioni d'equilibrio, sappiamo che la forza R deve essere zero, e che la coppia S deve pure essere di momento zero; le quali condizioni evidentemente danno.

$$\Sigma X = 0; \; \Sigma Y = 0; \; \Sigma Z = 0 \; ; \; F = 0; \; G = 0; \; H = 0$$

o più speditamente $\Sigma P\cos\alpha = 0 \qquad \Sigma P\cos\beta = 0 \qquad \Sigma P\cos\gamma = 0$

$$\left.\begin{array}{lll} \Sigma(y_2 - z_y) = 0 & \Sigma(z_x - x_2) = 0 & \Sigma(x_y - y_x) = 0 \end{array}\right\} (a)$$

Le 6 eq.ni (a) sono le eq.ni d'equilibrio di un sistema rigido e libero sollecitato da forze qualunque. Quando siano soddisfatte tutte quante le 3 prime si ha una risultante unica parallela ad un asse. Se invece una sia soddisfatta delle 3 ultime si avrà una rotazione intorno ad una retta coordinata. Per l'equilibrio devono soddisfarsi tutte e 6.

Noi abbiamo visto che perchè il sistema dato possa ridursi ad una risultante unica bisogna che la forza R sia parallela all'asse della coppia S, ovvero che la forza R e l'asse della coppia S formino angolo retto fra di loro. Secondo le notazioni adottate l'angolo in questione ha per

avremo $\cos\delta = \cos\xi\cos\lambda + \cos\nu\cos\mu + \cos\zeta\cos\nu$.

Perchè il sistema si riduca ad una risultante unica bisognerà che $\delta = 90°$ ossia $\cos\xi\cos\lambda + \cos\nu\cos\mu + \cos\zeta\cos\nu = 0$

E sostituendo a $\cos\xi, \cos\nu, \cos\mu, \cos\lambda$ ... i loro valori avremo

$$\frac{F\Sigma X + G\Sigma Y + H\Sigma Z}{RM} = 0 \qquad (1)$$

Ora il denominatore non essendo mai infinito per valori finiti delle forze e delle loro coordinate, segue che la condizione per la risultante unica si riduce a $F\Sigma X + G\Sigma Y + H\Sigma Z = 0$ ... (C)

Nel caso particolare in cui R sia nullo, il sistema ridotto si riduce ad una coppia e l'espressione (6) diventa $\frac{0}{0}$. In questo caso il criterio (C) non cade effondori soppresso il denominatore che va a zero. Quando dunque i 3 termini del 2° membro della (C) vanno separatamente a zero, perchè i loro fattori $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$ sono zero essi la risultante unica sia base una coppia unica. Quando il 2° membro della (C) non è zero una unica frazione piccolissima allora concluderà: e che questo errore provenga da che nelle quantità $F, G, H, \Sigma X$ ecc. entrano grandezze che non si poterono avere che per approssimazione: o supponendo subito questo ragionamento conclude che l'angolo che la forza R fa col piano della coppia S è piccolissimo. Allora decomponendo la R in due forze una contenuta nel piano della coppia S, l'altra normale a questo piano quest'ultima sarà piccolissima. Componendo la coppia con la forza contenuta nel suo piano si avrà una risultante unica. Onde così che sempre concludere si è che

che nel nostro caso è una retta è riducibile a 2 forze delle quali una sia parallela a. Nei casi pratici questa si può determinare facilmente generalmente è dato il punto di quelle forze da l'albero e quindi risultano determinate e assorbono.

Se si vogliono ridurre ad una risultante unica la forza R e una delle forze della coppia S, si avrà per tal modo ridotto il sistema dato a 2 sole forze. Questa trasformazione non presenta difficoltà nella sua esecuzione analitica. Le 6 quantità $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$, F, G, H sopra viste determinano le caratteristiche del sistema delle forze date.

(Venturoli 124 – 128)

LEZIONE XXXIX.

Formule per ottenere la risultante unica di un sistema di forze qualunque quando la condizione $F\Sigma X + G\Sigma Y + H\Sigma Z = 0$ si verifica. Applicazione all'caso di 3 forze parallele ai 3 assi ortogonali.

Se supponiamo verificata per un certo sistema di forze la condizione

$$F\Sigma X + G\Sigma Y + H\Sigma Z = 0 \quad \ldots\ldots (a)$$

tal sistema (Lez precedente) sarà riducibile ad una risultante unica la coppia la forza ad è ridurre il sistema essendo stata nel precedente paragrafo ripassata ciò che si è enunciato nella Lez XXXVII concernente la unica risultante unica Giova ora eseguire questa congiunzione col metodo ordinario seguito fare ciò molto più elegantemente: osservando che la risultante unica (Lez XXXVII) è eguale e parallela alla forza unica R e diretta nel medesimo senso; onde per determinarla completamente basterà assegnare un punto della retta su cui si trova. Sia W questa risultante unica: se noi consideriamo una forza ad essa eguale diretta in senso opposto W' questa unita a tutte le altre date deve soddisfare alle condizioni d'equilibrio (a) della Lez precedente. Chiamiamo $x'y'z'$ un punto della risultante unica. X', Y', Z' le sue componenti secondo gli assi; quelle della W' secondo gli assi saranno $-X', -Y', -Z'$; e le 3 prime condizioni d'equilibrio daranno $\Sigma X - X' = 0 \quad \Sigma Y - Y' = 0 \quad \Sigma Z - Z' = 0 \ldots (b)$

Prendiamo per noi profitto valendoci la W' applicata in x', y', z', le altre condizioni d'equilibrio daranno.

$$\Sigma(yz - zy) - y'z' + z'y' = 0 \quad \Sigma(zx - xz) - z'x' + x'z' = 0$$

$$\Sigma(xy - yx) - x'y' + y'x' = 0$$

o sostituendo a y', z', x' i loro valori dati dalle eq.ni (b) avremo

$$F = z'\Sigma Y - y'\Sigma Z, \quad G = x'\Sigma Z - z'\Sigma X, \quad H = y'\Sigma X - x'\Sigma Y.$$

Le quali 3 eq.ni determinerebbero x', y', z' ove la (a) che per ipotesi è soddisfatta non le riducesse a 2. Infatti se si moltiplichi la prima delle 3 per ΣX la 2ª per ΣY si avrà. $F\Sigma X = z'\Sigma X\Sigma Y - y\Sigma X\Sigma Z$ $G\Sigma Y = x'\Sigma Y\Sigma Z - z'\Sigma X\Sigma Y$

Sommando ambe queste ed osservando che $F\Sigma X + G\Sigma Y$ per la (a) è eguale a $-H\Sigma Z$ si otterrà $-H\Sigma Z = -y'\Sigma X\Sigma Z + x\Sigma Y\Sigma Z$; che divisa per $-\Sigma Z$ dà la 3ª delle 3 nostre condizioni. Fra le coordinate x', y', z' adunque hanno luogo due sole relazioni; il che indica che tutti i punti cercati sono sopra certa linea retta espressa dalle 2 eq.ni suddette. In breve le 3 eq.ni trovate sono le eq.ni delle 3 proiezioni della risultante totale sopra i piani coordinati.

Siano le 3 forze $X_1, Y_2 Z_3$ parallele agli assi delle quali la 1ª è applicata nel punto del piano yz che ha per coordinate $z = c_1$, $y = b_1$: la 2ª nel punto del piano xz che ha $x = a_2$, $z = c_2$: la 3ª nel punto del piano xy che ha $x = a_3$ $y = b_3$; si domanda se queste 3 forze hanno risultante unica. Gli evidentemente $\Sigma X = X_1$ $\Sigma Y = Y_2$ $\Sigma Z = Z_3$; $F = Y_2 c_1 - Z_3 b_3$

$G = Z_3 a_3 - X_1 c_1$; $H = X_1 b_1 - Y_2 a_2$ sostituendo queste valori nella (a) si ha per condizione $X_1(Y_2 c_1 - Z_3 b_3) + Y_2(Z_3 a_3 - X_1 c_1) + Z_3(X_1 b_1 - Y_2 a_2) = 0$ ovvero

$$X_1 Y_2 (c_2 - c_1) + X_1 Z_3 (b_1 - b_3) + Y_2 Z_3 (a_3 - a_2) = 0$$

Quando X_1 Y_2 sono nello stesso piano parallelo ad xy si ha $c_2 = c$; ed allora la condizione della risultante unica è $X_1(b_1 - b_3) + Y_1(a_3 - a_2) = 0$ da cui $\frac{X_1}{Y_1} = \frac{a_2 - a_3}{b_1 - b_3}$; il che indica che il punto d'applicazione della Z_3 deve trovarsi sulla proiezione della risultante delle X_1, Y_1 sul piano xy: o che la direzione della risultante deve incontrare la direzione della Z_3. È manifestamente senza questa condizione la risultante non avrebbe luogo.

LEZIONE XL.

Condizioni d'equilibrio di un sistema rigido ritenuto per un punto fisso — Condizioni d'equilibrio di un sistema rigido appoggiato per un punto ad una superficie data p. o sopra una curva intersezione di 2 superficie. Determinazione della pressione sui punti fissi o d'appoggio in tutti questi casi.

Le condizioni d'equilibrio trovate nella Lez XXXVIII rappongono il sistema cui si applicano le forze come rigido e assolutamente libero. Veniamo a considerare le condizioni d'equilibrio nel caso in cui il sistema sia soggetto a condizioni che gli impediscano certi movimenti.

Supponiamo dapprima che un punto del sistema rigido sia immobilmente ritenuto. E primieramente ricerchiamo per l'equilibrio che il sistema abbia una risultante unica che passi pel questo punto. Perchè se la risultante non fosse unica, ma il sistema fosse riducibile a sole 2 forze una di queste potrebbe elidersi dal punto, mentre l'altra produrrebbe una rotazione attorno allo stesso. Dunque se α, β, γ sieno le coordinate del punto fisso, esse devono soddisfare alle 3 condizioni che legano fra loro le coordinate di qualunque punto della direzione della risultante, che abbiamo trovato nella Lez precedente e le 3 eq. d'equilibrio saranno:

(1) $F = \gamma\Sigma Y - \beta\Sigma Z \;;\; G = \alpha\Sigma Z - \gamma\Sigma X \;;\; H = \beta\Sigma X - \alpha\Sigma Y.$

Che se prendasi per origine delle coordinate il punto stesso di ritegno avrà per condizioni: $F = 0, G = 0, H = 0$ . . . (2).

È evidente che in questo caso la pressione o tensione sul punto fisso

equivalga la risultante unica R, le cui 3 componenti secondo gli assi sono evidentemente ΣX, ΣY, ΣZ, rispettivamente. La condizione dell'esistenza di una risultante unica è poi contenuta nelle 3 eq. (1). Infatti moltiplicando la 1ª per ΣX, la 2ª per ΣY, la 3ª per ΣZ si ha evidentemente sommando membro a membro.

$$F\Sigma X + G\Sigma Y + H\Sigma Z = \gamma\Sigma X\Sigma Y - \beta\Sigma X\Sigma Z + \alpha\Sigma Y\Sigma Z - \gamma\Sigma X\Sigma Y + \beta\Sigma X\Sigma Z - \alpha \overset{\Sigma y z z.}{}$$

della quale il 2° membro è zero per identità e si ottiene così la condizione della risultante unica.

Consideriamo in 2° luogo l'equilibrio di un sistema rigido appoggiato per un sol punto ad una superficie curva la cui eq. differenziale sia $l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0$. Egli è giuocoforza innanzitutto in 1° luogo che la risultante sia unica e normale oltre a ciò alla superficie nel punto di contatto. Il punto α, β, γ di contatto dovrà dunque soddisfare alla condizione che la risultante passi per esso

$$F = \gamma\Sigma Y - \beta\Sigma Z\ ;\quad G = \alpha\Sigma Z - \gamma\Sigma X\ ,\quad H = \beta\Sigma X - \alpha\Sigma Y \ldots (a)$$

Di più affinchè la risultante R sia normale, poichè abbiamo scritti in principio della Leg XXXVIII devono essere eguali a quelli λ, μ, ν degli angoli che la normale alla superficie in α, β, γ, di cui i coseni sono direttamente l', m', n', cioè che diventano l, m, n dopo sostituiti α, β, γ a x, y, z

$$\cos\lambda = \frac{l'}{\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}\ ;\quad \cos\mu = \frac{m'}{\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}\ ;\quad \cos\nu = \frac{n'}{\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}$$

sarà dunque $\dfrac{\Sigma X}{R} = \dfrac{l'}{\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}$; $\dfrac{\Sigma Y}{R} = \dfrac{m'}{\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}$; $\dfrac{\Sigma Z}{R} = \dfrac{n'}{\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}$

da si badi che si ha $\Sigma X : \Sigma Y :: l' : m' : n'$. (6)

Le quali 2 eq. congiunte con le (a) formano le 5 condizioni d'equilibrio di un sistema rigido appoggiato ad una superficie in un punto.

Anche in questo caso la pressione sulla superficie è eguale alla risultante R. Essa deve tuttavia servire a spingere il corpo contro la superficie e non ad allontanarlo.

Cerchiamo ora di considerare le condizioni d'equilibrio di un sistema rigido obbligato a stare con uno dei suoi punti sopra a superficie date ed un altro sopra la loro comune intersezione. Anche qui la risultante dovrà esser nulla e propria pel punto $A, B, \ldots$ della curva su cui è fatto un punto del sistema rigido, perciò avremo ancora

$$F = \gamma \Sigma Y - \beta \Sigma Z, \quad G = \alpha \Sigma Z - \gamma \Sigma X, \quad H = \beta \Sigma X - \alpha \Sigma Y \ldots (c)$$

Di più cotal risultante R dovrà esser normale alla curva comune intersezione delle 2 superficie; il che equivale a dire che scomponendo le 3 forze secondo gli assi $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$, la somma delle componenti di queste 3 forze secondo la tangente deve esser nulla; perchè nulla deve esser la componente di R secondo la tangente. Ora i coseni degli angoli che fa la tangente con questa 3 componenti o coi gli assi sono $\cos\xi = \frac{dx}{ds}$; $\cos\upsilon = \frac{dy}{ds}$; $\cos\zeta = \frac{dz}{ds}$

le 3 componenti di $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$ secondo la tangente saranno dunque

$$\Sigma X \cos\xi = \Sigma X \left(\frac{dx}{ds}\right); \quad \Sigma Y \cos\upsilon = \Sigma Y \left(\frac{dy}{ds}\right); \quad \Sigma Z \cos\zeta = \Sigma Z \left(\frac{dz}{ds}\right)$$

Epperò l'accennata condizione porta

$$\Sigma X \left(\frac{dx}{ds}\right) + \Sigma Y \left(\frac{dy}{ds}\right) + \Sigma Z \left(\frac{dz}{ds}\right) = 0 \ldots (d)$$

che aggiunta alle (c) dà le 6 eq.ni d'equilibrio di un sistema rigido obbligato a mantenersi per un punto fissato sopra una curva qualunque. La pressione ancora qui eguale alla risultante R. Se la condizione cui è soggetto il sistema sia di rimanersi ad un tempo sopra 2 superficie curve, è chiaro che bisognerà ancora che R sia compresa dentro l'angolo che fanno fra di loro i 2 piani tangenti alle 2 superficie nel punto $A, B, \ldots$ pensato il sistema necessario per l'una delle 2 superficie date.

(Venturoli 126, 128, 129)

LEZIONE XLI

Condizioni d'equilibrio di un corpo ritenuto per 2 punti fissi – Calcolo delle pressioni sui cardini e motivo dell'indeterminazione della pressione sofferta da ciascun cardine nel senso dell'asse – Equilibrio di un sistema rigido appoggiandolo per 2 punti sopra 2 superficie curve.

SIA un sistema rigido ritenuto unicamente da 2 punti o cardini fissi talchè non possa prendere che un moto rotatorio intorno alla retta che congiunge questi due punti e che dicesi asse. Se noi prendiamo quest'asse per asse delle z e di più nella direzione del sistema ad una forza esterna R e ad una coppia S, scegliamo per punto d'applicazione della R un punto dell'asse, è evidente che basterà per l'equilibrio che la coppia S non possa produrre alcuna rotazione intorno all'asse z, cioè che il suo piano passi per l'asse z; perchè nella fatta ipotesi la R non potrà pure produrre alcun movimento. La condizione accennata ritorna a questa, che il momento di rotazione della coppia S rispetto all'asse z sia zero, cioè che la coppia componente di S e posta nel piano xy abbia un momento zero. Ed in parte enunciata

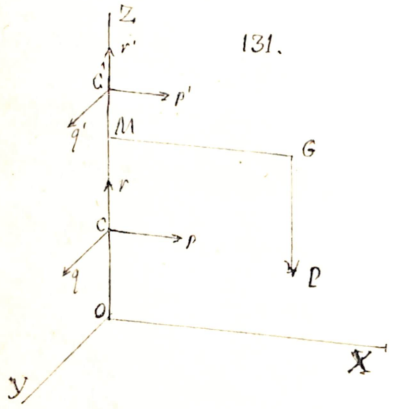
$$H = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \Sigma(Xy - Yx) = 0 \quad \ldots \quad (a)$$

Alla quale conclusione del resto per una altra strada si è già pervenuto nella Lez. XXX. Che se di cardini fissi ve ne sono molti lungo l'asse pure rimane che il sistema sovra lungo di medesimo troverà ancora che la risultante R sia ortogonale all'asse z cioè che la componente di R secondo quest'asse sia zero.

$$\Sigma Z = 0 \quad \ldots \quad (b)$$

Quando questa condizione non si verifichi, i cuscinetti sopporteranno una certa pressione secondo l'asse z, oltre ad altre eventuali al numero sorte allo sforzo della coppia S e delle componenti di R secondo x e y, non calcolate. Per giungere a determinare queste pressioni noi supponiamo applicate ai cuscinetti delle forze eguali e contrarie alle pressioni sofferte dai cuscinetti. Allora è evidente che, eguagliando tolti i cuscinetti, il sistema così ottenuto è soddisfacente alle 6 eq. generali d'equilibrio di un sistema rigido. Supponga inoltre che le 3 componenti della pressione sofferta dal cuscinetto C secondo gli assi siano p, q, r, e $p' q' r'$ quelle della pressione sofferta dal cuscinetto C'. La somma delle componenti secondo gli assi del sistema totale dovrà esser zero, e quindi

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X - p - p' = 0 \quad ; \quad \Sigma Y - q - q' = 0 \\ \Sigma Z - r - r' = 0 \end{aligned}\right\} \quad (c)$$



131.

La somma dei momenti di tutte le forze rispetto ai 3 assi dovranno esser zero; così momenti di $-p, p, -r$ rispetto all'asse x sono $0, -qc, 0$; quelli di $-p', q', -r'$ (cambiando ancora segno al segno $-$ perchè sono eguali e opposti alle pressioni $p' q' r'$) $0, -q'c', 0$; Nello stesso modo si ha somma altrove e rispetto alla 2ª asse z tutte le rotazioni

Onde l'eq. $P - qc - q'c' = 0 \quad (d)$

y l'eq. $G + pc + p'c' = 0 \quad (e)$

Combinando con la prima delle (c) colla (e)

$$p' = -\frac{c'\Sigma X + G}{c' - c} \quad \ldots \quad (g)$$

facendo nelle sui $H = 0 \quad (f)$

si ottiene $p = \dfrac{c'\Sigma X + G}{c' - c}$

Combinando la 2ª delle (c) colla (d) si ha

$$q = \frac{c'\Sigma Y - F}{c'-c} \qquad q' = -\frac{c\Sigma Y - F}{c'-c} \quad \ldots\ldots\ldots (h)$$

Evidentemente la $H=0$ non esprimendo altro che le condizioni d'equilibrio del solo sistema intorno al proprio asse non contiene r ed r' onde per queste 2 quantità non rimangono che la 1ª eq. $r+r' = \Sigma Z$ mercè che si ha potuto avere soltanto la somma, separatamente rimanendo indeterminate. È difatti non potendo ripetere la pressione r trasportata lungo la linea direttrice ad applicarsi in C oppure la contraria pressione applicata una parimente in C trasportata il rettante in C' parendo la somma delle 2 pressioni rimane l'asse eguagliato sempre ΣZ. In natura però le 2 pressioni r ed r' rimangono sempre ben determinate, perchè in difetto hanno l'influenza l'elasticità e flessibilità dei corpi che si considerano i quali non sono mai assolutamente rigidi.

Sia pure ss il corpo pesante il cui centro di gravità è in G ed il suo peso è P attuato ai cardini C e C'. Supponendo in modo che G cada nella parete xz non avremo $\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$; $\Sigma Z = -P$; $F=0$; $H=0$; $c - G = Pa$; poichè il momento di P rispetto ad X, Z, è nullo e tende solo a far girare il corpo da sinistra a destra con momento $= P \times GM = Pa$ (se facciasi $MG = a$) Sostituendo tali valori nelle eq (g) (h) avremo.

$$r + r' = -P; \quad p = -\frac{Pa}{c'-c}; \quad p' = \frac{Pa}{c'-c}; \quad q = 0 \quad q' = 0;$$

Ecco espresso 1º che il cardine superiore è tratto all'esterno dalla forza P' quanto proporzionale alla distanza dei cardini, al peso del corpo e la distanza del centro di gravità dall'asse: 2º che il cardine inferiore è spinto all'interno con eguale forza: 3º che queste 2 forze agiscono nel piano parallelo fra l'asse e quel centro di gravità: 4º che la somma delle 2 pressioni verticali sostenute dai

dai cardini diretta all'ingiù è uguale al peso del corpo. Se si pone che questo corpo sia una porta sarà facile vedere tutte le condizioni perchè essa stia equilibrata, e le migliori maniere di collocare i cardini e distribuirne il peso, se il cardine superiore fosse un semplice anello, e l'inferiore un pernio grande come cardini ordinarii, la pressione orizzontale sull'uno sarebbe tutta sostenuta dal primo. Quando i cardini sono ugualmente vicini le 2 pressioni orizzontali diventano grandissime e la porta tende allora a piegarsi in direzione orizzontale.

Equilibrio di un sistema rigido appoggiato a 2 superficie. Sia un sistema rigido qualunque che s'appoggia alla superficie $ldx+mdy+ndz=0$ nel punto α, β, γ; e alla superficie $l'dx'+m'dy'+n'dz'$ nel punto α', β', γ': si domanda le condizioni di equilibrio del sistema e le pressioni nelle superficie.

Siano p, q, r le pressioni esercitate secondo gli assi nel punto α, β, γ, p', q', r' quelle esercitate nel punto α', β', γ'; sarà necessario per l'equilibrio: 1° che tutto il sistema dato possa decomporsi in 2 forze normali alle 2 superficie in quei 2 punti, ed eguali alle risultanti di p, q, r, p', q', r'. Onde se noi immaginiamo applicate in α, β, γ, α', β', γ' le forze $-p, -q, -r$, $-p', -q', -r'$ eguali e direttamente contrarie a quelle pressioni; dovrà fra queste e il sistema dato esservi equilibrio: di più quelle risultanti dovranno essere normali alle 2 superficie in α, β, γ, $\alpha' \beta' \gamma'$. Scriviamo dapprima le 6 equazioni di equilibrio fra le date forze e le aggiunte;

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma X - p - p' = 0 \;;\; \Sigma Y - q - q' = 0 \;;\; \Sigma Z - r - r' = 0 \\ F - (qr - r\mathcal{Q}) - (q'r' - r'\mathcal{Q}') = 0 \quad G - (r\alpha - pr) - (r'\alpha' - pr') = 0 \\ H - (p\mathcal{Q} - q\alpha) - (p'\mathcal{Q}' - q'\alpha') = 0 \end{array}\right\} (\Phi)$$

dove le quantità fra parentesi esprimono i normali delle 2 risultanti rispetto ai 3 assi. Ma di più queste risultanti debbono riuscire normali rispettivamente alle 2 superficie; quindi ne escono altre 4 condizioni (v. la Leg. XI.) $p:q:r::l:m:n::\lambda:\mu:\nu$.

$$p':q':r'::l':m':n'::\lambda':\mu':\nu'.$$

dove λ,μ,ν, λ',μ',ν', sono ciò che diventano l,m,n, l',m',n' dopo che vi si è sostituito α,β,γ, α',β',γ', in luogo di x,y,z x',y',z'. Da queste ultime facendo $\frac{p}{l}=k$ $\frac{p'}{l'}=k'$ si ottiene $p=kl$; $p'=k'l'$, $q=km$, $q'=k'm'$, $r=kn$, $r'=k'n'$ o meglio

$$\nu=k\lambda,\quad \rho=k\lambda',\quad q=k\mu\quad q'=k'\mu',\quad r=k\nu\quad r'=k'\nu';\ (q)$$

Sostituendo questi valori nelle (i') si ottiene fra le 2 incognite $k\,k'$ le 5 equazioni

$$\left.\begin{aligned}\Sigma X&=k\lambda+k'\lambda'\\ \Sigma Y&=k\mu+k'\mu'\\ \Sigma Z&=k\nu+k'\nu'\end{aligned}\right\}(p)\qquad \left.\begin{aligned}F&=k(\mu\psi-\nu\zeta)+k'(\mu'\psi'-\nu'\zeta')\\ G&=k(\nu\alpha-\lambda\psi)+k'(\nu'\alpha'-\lambda'\psi')\\ H&=k(\lambda\zeta-\mu\alpha)+k'(\lambda'\zeta'-\mu'\alpha')\end{aligned}\right\}(m)$$

Sommando ognuna le (l) e ognuna le (m) poi facendo

$\Sigma X+\Sigma Y+\Sigma Z=\Psi$, $F+G+H=\Phi$, $\lambda+\mu+\nu=\omega$ $\lambda'+\mu'+\nu'=\omega'$

$\mu\psi+\nu\alpha+\lambda\zeta-\nu\beta-\lambda\psi-\mu\alpha=\varepsilon$ $\mu'\psi'+\nu'\alpha'+\lambda'\zeta'-\nu'\zeta'-\lambda'\psi'-\mu'\alpha'=\varepsilon'$

si ottengono le 2 equazioni $\Psi=k\omega+k'\omega'$ $\Phi=k\varepsilon+k'\varepsilon'$ onde

$$k=\frac{\varepsilon'\Psi-\Phi\omega'}{\omega\varepsilon'-\omega'\varepsilon}\qquad e\qquad k'=-\frac{\varepsilon\Psi-\Phi\omega}{\omega\varepsilon'-\omega'\varepsilon}.$$

Onde finalmente si può determinare p,q,r, p',q',r', componenti delle pressioni sulle 2 superficie. Ma eliminando K, K' fra le (l) e le (m) risulteranno le 4 relazioni fra $\Sigma x, \Sigma y, \Sigma z, \lambda,\mu,\nu, \lambda',\mu',\nu'$, $\alpha,\beta,\gamma, \alpha',\beta',\gamma'$, F,G,H, le quali determineranno le 4 condizioni dell'equilibrio per qualunque caso. Difatti ricavasi K e K' dalle 2 prime fra le (l), poi dalle 2 ultime, e si raggruppino i valori trovati; si avranno le 2 condizioni

$$(n)\qquad \frac{\mu\Sigma x - \lambda\Sigma y}{\lambda\mu - \lambda\mu'} = \frac{\mu\Sigma z - \nu\Sigma y}{\nu\mu - \nu\mu'} \qquad \frac{\mu'\Sigma x - \lambda\Sigma y}{\lambda'\mu - \lambda\mu'} = \frac{\mu'\Sigma z - \nu'\Sigma y}{\nu'\mu - \nu\mu'}$$

Similmente dalle (m) si ottiene

$$(o)\qquad \begin{cases} \dfrac{(\nu\alpha - \lambda\gamma)F - (\mu\gamma - \nu\beta)G}{(\mu'\gamma' - \nu'\beta')(\nu\alpha - \lambda\gamma) - (\mu\gamma - \nu\beta)(\nu'\alpha' - \lambda'\gamma')} = \dfrac{(\nu\alpha - \lambda\gamma)H - (\lambda\beta - \mu\alpha)G}{(\lambda'\beta' - \mu'\alpha')(\nu\alpha - \lambda\gamma) - (\lambda\beta - \mu\alpha)(\nu'\alpha' - \lambda'\gamma')} \\ \dfrac{(\nu'\alpha' - \lambda'\gamma')F - (\mu'\gamma' - \nu'\beta')G}{(\mu'\gamma' - \nu'\beta')(\nu\alpha - \lambda\gamma) - (\mu\gamma - \nu\beta)(\nu'\alpha' - \lambda'\gamma')} = \dfrac{(\nu'\alpha' - \lambda'\gamma')H - (\lambda'\beta' - \mu'\alpha')G}{(\lambda'\beta' - \mu'\alpha')(\nu\alpha - \lambda\gamma) - (\lambda\beta - \mu\alpha)(\nu'\alpha' - \lambda'\gamma')} \end{cases}$$

Le equazioni (n) ed (o) sono equazioni di equilibrio del sistema: quando esse si verificano si ricavano le pressioni eseguendo dei valori di K e K' e sostituendoli nelle (q)

(Venturoli 127, 130, 131, 132) (Poisson 260 261)

LEZIONE XLII.

Equilibrio di un sistema rigido fra 5 superficie date. – Equilibrio di 2 corpi che s'appoggiano l'un contro l'altro. – Equilibrio di più superficie o corpi rigidi appoggiantesi gli uni contro gli altri e contro superficie resistenti.

SIANO a cercare le condizioni di equilibrio di un corpo o sistema rigido appoggiantesi a 5 superficie date le cui equazioni differenziali siano

$$l dx + m dy + n dz = 0$$

$$l' dx + m' dy + n' dz = 0$$

$$l'' dx + m'' dy + n'' dz = 0$$

e toccante ciascuna di esse nei rispettivi punti, a, b, c a', b', c', a'', b'', c'' se non alla resistenza delle 5 superficie, sostituiamo come nell'esempio precedente le 5 pressioni da loro esercitate sul sistema, dovrà ancora aver equilibrio. Siano p, q, r, p', q', r', p'', q'', r'' le 5 componenti secondo gli assi delle 5 pressioni del corpo esercitate sulle superficie, avremo evidentemente dalla condizioni dell'equilibrio

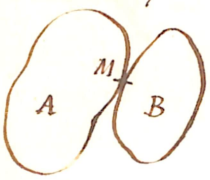
$$p + p' + p'' = \Sigma X \,, \quad q + q' + q'' = \Sigma Y \,, \quad r + r' + r'' = \Sigma Z$$

$$qc - rb + q'c' - rb' + q''c'' - rb'' = F \,; \quad ra - pc + ra' - pc' + ra'' - pc'' = G;$$

$$pb - qa + pb' - qa' + pb'' - qa'' = H.$$

(V. Les precedenti) Di più le 5 pressioni sulle 5 superficie essendo normali alle medesime, n'avranno ancora, esprimendo questa condizione le 6 equazioni.

$p:q:r::l:m:n$, $p':q':r'::l':m':n'$ $p'':q'':r''::l'':m'':n''$
le quali congiunte alle prime 6 danno 12 equazioni, fra le quali
eliminando p, q, r, p', q', r', p'', q'', r'', col mezzo adoperato nella
della Lez antecedente, avrò le 6 condizioni d'equilibrio per questo caso.
Le quali venendo soddisfatte, è facile venire coll'ajuto delle altre equazioni
alla determinazione delle 9 pressioni.



Applichisi ora il corpo A animato dal sistema di forze
le cui caratteristiche sono $\Sigma X'$, $\Sigma Y'$, $\Sigma Z'$, F', G' H'
contro il corpo B animato dal sistema, le cui caratte-
ristiche sono $\Sigma X''$, $\Sigma Y''$, $\Sigma Z''$, F'', G'', H''. e si applichi
per un punto M. È manifesto che se i 2 corpi appoggiandosi l'un contro
l'altro per il punto M le cui caratteristiche sono a, b, c stanno in equilibrio,
togliendo il corpo B, ed applicando ad A in M una pressione o forza normale
alla sua superficie ed eguale alla pressione del corpo B, A deve costituirsi in
equilibrio. Voltili quindi noti il punto M gli angoli della comune normale
alle 2 superficie coi 3 assi, α, β, γ, sono quindi ben noti, se chiamerò
N la pressione di B contro A, avrò dunque come per l'assoluto equi-
librio di A

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma X' + N\cos\alpha = 0,\ \Sigma Y' + N\cos\beta = 0\ \ \Sigma Z' + N\cos\gamma = 0 \\ F' = cN\cos\beta - bN\cos\gamma;\ \ G' = aN\cos\gamma - cN\cos\alpha;\ \ H' = bN\cos\alpha - aN\cos\beta \end{array}\right\}(a)$$

Se poi osserviamo che la pressione che B trasmette ad A per M è assoluta-
mente eguale e direttamente contraria a quella che A esercita sul B, sostituen-
do al corpo A la pressione $-N$ il corpo B dovrà costituirsi in equilibrio
sotto l'azione del suo sistema di forze, e della forza $-N$. Quindi scrivendo

questa condizione avremo.

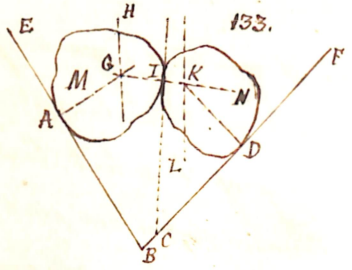
$$\Sigma X'' - N'\cos\alpha = 0 \qquad \Sigma Y'' - N\cos\beta = 0 \qquad \Sigma Z'' - N'\cos\gamma = 0$$

$$F'' = bN\cos\gamma - cN\cos\beta \qquad G'' = cN\cos\alpha - aN\cos\gamma \qquad H'' = aN'\cos\beta - bN\cos\alpha \qquad (b)$$

Nel sistema delle 12 equazioni (a) e (b) eliminando N facilmente si possono ottenere le 11 equazioni d'equilibrio. Queste dovranno esprimere che ciascuno dei 2 sistemi è riducibile ad una risultante unica applicata in M normalmente alle 2 superficie, e che queste 2 risultanti sono eguali e direttamente contrarie.

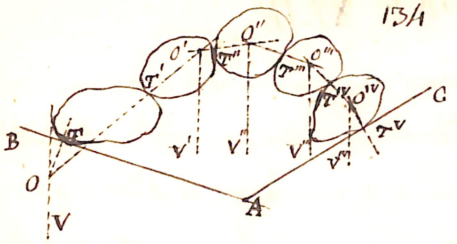
Questo metodo di investigare le condizioni di equilibrio è generale e può applicarsi alla ricerca delle condizioni di equilibrio di un N^{o} qualunque di corpi che si appoggino gli uni contro gli altri o contro superficie resistenti. Bensì se non consideriamo le pressioni sofferte da ciascun corpo nei suoi punti di contatto cogli altri, e diciamo che sostituendo a queste pressioni delle forze il corpo deve rimanersi in equilibrio indipendentemente dagli altri, prendendo le forze uguali e dirette nello stesso verso alle pressioni, e come queste applicate nei punti di contatto. In tal modo a ciascun punto di contatto si vengono ad applicare 2 forze eguali e direttamente contrarie, rappresentanti le pressioni vicendevoli dei 2 corpi toccantisi in quel punto. Siano N i punti di contatto; applicando in essi tutte quelle forze introdurremo n indeterminate. Ma ciascun corpo dovendo dopo la loro applicazione rimanersi in equilibrio indipendentemente dagli altri fornirà 6 condizioni. Onde se m fosse il numero dei corpi, avremo fra n indeterminate 6 m equazioni; onde eliminate le n indeterminate, rimarranno

pel sistema di quei corpi $6m-n$ equazioni o condizioni di equilibrio. Quando si ha $n = 6m$ oppure $n > 6m$, rimane impossibile diminuire le indeterminate, ed in tale caso l'equilibrio sussiste indipendentemente da qualunque condizione. Quando dei punti di contatto a luogo fisso ed i corpi fossero a quelli invariabilmente ritenuti, ed essendo le condizioni che le 2 pressioni debbano in quel punto agire normalmente alle 2 superficie; e ognuno di tali punti debbano 2 equazioni di condizione.



133.

Siano per fissare un esempio semplice a cercare le condizioni d'equilibrio di 2 corpi pesanti appoggiati a 2 piani EB, BF, e fra di loro in I, e ricercando per l'equilibrio che il peso dei 2 corpi applicati in un punto delle rispettive verticali GH IK possa scomporsi per ciascheduno in una pressione sul piano adjacente e in una pressione nell'altro corpo lungo per I, diretta normalmente alle 2 superficie, e che questa pressione sia eguale da ambi i lati di I per i 2 corpi. Le quali condizioni ritornano a ciò che i 3 punti di contatto A, I, D. si trovino in uno stesso piano verticale normale alla comune intersezione dei 2 piani, che perciò deve essere orizzontale, che i punti G, K, d'incontro delle normali AG, GK, KD nei punti di contatto passino per verticali HG KI, dai centri di gravità dei 2 corpi; e che le pressioni di M contro N e di N contro M siano eguali e direttamente contrarie.



Nello stesso modo perchè una serie di corpi appoggiati successivamente l'uno contro l'altro e di cui gli estremi si appoggino su 2 piani inclinati AB, AC. stia in equilibrio, bisogna 1° che tutti i punti di contatto T T' T''... siano su un medesimo piano verticale normale alla comune sezione dei 2 piani: 2° che le verticali dei centri di gravità dei corpi cadano nei punti O, O', O''.... delle intersezioni successive delle normali comuni a ciascun corpo col suo antecedente e col suo consequente. 3° che scomponendo i pesi di ciascun corpo in pressioni secondo queste normali le 2 pressioni direttamente contrarie applicate nei punti di contatto siano pure eguali in valor assoluto.

Da queste considerazioni dipenderebbe la ricerca dell'equilibrio delle volte ma siccome bisogna pur tener anche conto dell'attrito, dell'elasticità dei materiali, della forza dei cementi, ecc. se ne lascia la cura all'arte della costruzione.

(Vedi pag. 265 266)

LEZIONE XLIII.

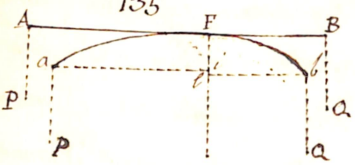
Proprietà da tolgono, che i corpi, quali si trovano in natura possono considerarsi come sistemi rigidi – Eccentricità – Comprimibilità – Elasticità – Equilibrio di un filo sollecitato da 2 forze – Tensione del filo – Leggi dell'allungamento dei fili, formule che danno l'allungamento per date tensioni – Leggi della compressione delle verghe rigide e formole relative.

Noi abbiamo fin'ora considerato come assolutamente incomprimibili, inestensibili, e rigidi i corpi di che abbiam preso ad esaminare le condizioni di equilibrio. La quale è un'ipotesi puramente ideale, perchè veramente in natura di tali corpi non si danno.

Difatti noi sappiamo che ogni corpo è composto di molecole, le quali sono dotate di facoltà ripulsive ed attrattive fra di loro esercitabili. Queste forze dicesi forze molecolari si esercitano solo a distanze insensibili; e l'equilibrio fra di loro costituisce lo stato normale del corpo. Difatti se al corpo si applichi una forza qualunque, le molecole cangeranno in parte di posizione, e quindi la forma del corpo si muterà: e si muterà fin tanto che esso giunga ad uno stato in cui le attrazioni e ripulsioni delle molecole sotto l'azione della forza aggiunta si facciano nuovamente equilibrio. Ond'è che quando si applica ad un corpo una forza qualunque, la sua forma cangia fino ad un certo segno oltre al quale restabilendosi nuovamente l'equilibrio fra le molecole, il corpo rispetto a quella forza può considerarsi come un sistema rigido, perchè la sua forma diventa allora invariabile. Variando la forma egli è chiaro che le condizioni di equilibrio dovranno in parte mutarsi. Così se nel fulcro F' i 2 pesi P, Q si

fermo equilibrio, se la verga AB è rigida ed inflessibile non avremo per la condizione di equilibrio $P \times FA = Q \times FB$. Ma supponiamo che per la forza dei 2 pesi la verga flettendosi venga a prender la forma aFb: allora per condizione di equilibrio si troverà $P \times ai = Q \times bl$. Le ricerche dunque da abbiamo fatte nell'equilibrio dei corpi rigidi non sono già inutili; ma per poterle applicare convenne passare dai corpi metafisici ai corpi fisici, e investigare quali siano le mutazioni nella loro costituzione prodotte dalle forze che ci si applicano, e cercarne le leggi.

135



Un corpo suscettibile di cangiar di figura sotto l'influenza di agenti esterni appellasi flessibile, e flessibilità dicesi questa suscettibilità. Similmente dicesi estensibilità la proprietà di aumentar di volume sotto le stesse forze, e distensibili chiamansi i corpi che ne godono. Dicesi poi compressibilità la facoltà di diminuir di volume, e comprimibili i corpi che sono di essa dotati. Finalmente è facile notare che quando un corpo muta figura o volume sotto l'azione di forze esterne, oppone una certa resistenza che queste forze debbono vincere e che tende a ridonare al corpo la primitiva forma o volume; e questa virtù di fatto ove le forze esterne vengano a cessare: questa forza o proprietà che nei corpi risiede, e che è effetto delle azioni molecolari vicendevoli dicesi elasticità ed elastici i corpi cui essa è attaccata. L'elasticità è completa o incompleta secondo che dopo che le forze esterne hanno cessato di agire la figura o il volume del corpo si ristabiliscono completamente o incompletamente.

Noi cominceremo a considerare nel corpo la sola flessibilità astrazione fatta dall'elasticità; e prenderemo primieramente a considerare l'equilibrio di un corpo interamente flessibile, cioè che non opponga veruna resistenza ad esser piegato, quale sarebbe un filo infinitamente sottile di vetro di metallo ecc. Oppure una sottilissima fune, o una catena nelle cui giunture non si esercita veruno attrito. Insomma quando diremo filo flessibile intenderemo un sistema che si può piegare senza nessuno sforzo in tutti i suoi punti e in un numero determinato quale è appunto il caso di una catena.

Incominciamo a considerare un tal filo sollecitato da 2 forze agenti alle sue 2 estremità. Per un istante bacissimo, l'azione delle 2 forze si impiegherà a trasmettere il movimento da molecola a molecola finchè giungano le 2 forze ad esercitarsi l'una sull'altra, influenza reciproca. Raggiunto questo stato è chiaro che per l'equilibrio, le molecole dei costituenti il filo in linea retta, le 2 forze che agiscano nella sua direzione e siano eguali e direttamente contrarie. È manifesto che la tensione sarà dappertutto la stessa nelle varie parti del filo, ed eguale a ciascuna delle 2 forze. E lungo sua direzione in varii punti si applichino delle forze dirette lungo la direzione del filo, bisognerà per l'equilibrio che la somma delle forze agenti in un verso sia eguale e direttamente contraria a quella delle forze agenti pel verso opposto. È poi manifesto che la tensione sarà varia pei varii punti del filo e non sarà la stessa per tutti. Per esempio se al punto fisso K sia attaccato un filo teso dai pesi P, P', P''.... applicate lungo la sua direzione in A, B, C... è chiaro che qualunque punto della porzione BA del filo sosterrà sola la tensione dovuta al peso applicato in A, tensione eguale

a P, Ma i pesanti compresi fra C e B dovendo sostenere i 2 pesi P e P'

la loro tensione sarà P+P'. Così sarà P+P'+P'' la tensione dei pesanti fra D e C; che se in N si applicasse una forza p volta all'insù, la tensione dei pesanti fra N e C sarebbe P+P'+P''. Mentre quella dei pesanti compresi fra D e N sarebbe P+P'+P'-p. In generale la tensione in un punto qualunque del filo è eguale alla somma algebrica dei pesi applicati in punti al medesimo inferiori.

136.

Venendo ora a considerare l'estensibilità e compressibilità di un filo di tal natura, incominceremo dall'osservare che le leggi di questa estensibilità e compressibilità si potrebbero dedurre dalla teoria delle azioni molecolari, se pure questa fosse già abbastanza avanzata da aggiudicare questo problema. Ma nello stato attuale della scienza le leggi della compressibilità e dell'estensibilità si deducono dall'immediata esperienza. Esse cominciano dalle leggi evidenti: 1° che l'allungamento prodotto da una tensione è proporzionale alla lunghezza naturale del filo, cioè a quella che aveva prima della tensione: lo stesso dicasi della compressione. E difatti se una lunghezza 1 sotto una tensione t si allunga di una quantità u, la lunghezza 2l dee sotto la medesima tensione allungarsi della quantità 2u.

2°. L'allungamento e la compressione sono in ragione inversa dell'area della sezione del filo (supponiamo il filo di omogenea prossezza). Ed invero quanto maggiore è l'area della sezione, tanto maggiore è la forza opposta all'allungamento, tanto minore è quindi questo allungamento, eguale

compressione. 3° Finalmente prova l'esperienza che se le tensioni sono molto al disotto di quelle che produrrebbero la rottura del filo, l'allungamento e la compressione possono ancora sensibilmente considerarsi come proporzionali alle tensioni. È poi manifesto che per le stesse lunghezze, sezioni e tensioni può ancora essere vario l'allungamento e la compressione, dipendentemente dalla natura della materia di cui formasi il filo.

Se dunque per una data materia lo allungamento prodotto dalla tensione di una forza eguale all'unità in filo di lunghezza 1, e della cui area la sezione normale sia 1, chiamerò α; l'allungamento prodotto dalla tensione T affatto inferiore alla tensione che produce la rottura in un filo di lunghezza l e di sezione ω^2 sarà evidentemente $\alpha \frac{T}{\omega^2}$, chiamando Δl la differenza delle 2 lunghezze del filo prima e dopo l'allungamento sarà.

$$\Delta l = \alpha \frac{Tl}{\omega^2} \qquad (a)$$

La stessa formola vale per la compressione, poichè le sue leggi sono le stesse che quelle dell'allungamento. E di più si suppone che α sia anche il medesimo: cioè che l'allungamento prodotto dalla forza 1 che tende il filo di sezione 1 e lungo 1 è eguale alla compressione prodotta dalla stessa forza agente sullo stesso filo. È inutile di avvertire che quando si parla di compressione, il filo compresso si suppone interamente rigido ed inflessibile. Adunque prendendo forza 1, sezione 1, lunghezza 1, intendiamo che queste siano le unità di misura, cui si riferiscono le lunghezze del filo, e quelle delle sezioni e le forze. Per es. potrà adottarsi per unità di forza il Kilogramma, per unità della lunghezza del filo il metro, per unità dell'area della sezione il metro

quadrato. Dalla formola (a) si ricava $T = \omega^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta l}{l}$, e ponendo $\frac{1}{\alpha} = E$

$$T = E\omega^2 \frac{\Delta l}{l}$$

Ora è evidente che se la lunghezza l si allunga di Δl, ciascuna unità di lunghezza del filo si allungherà di $\frac{\Delta l}{l}$. Onde la tensione è proporzionale al coefficiente E, alla sezione del filo e all'allungamento dell'unità di lunghezza. Poniamo un filo di sezione eguale all'unità il quale si allunghi di una quantità eguale alla lunghezza naturale, sarà $\omega^2 = 1$ $\Delta l = l$, allora ne conseguirà $E = T$. È dunque per un filo di data materia il coefficiente E eguale alla tensione necessaria per allungare del filo di sezione 1 di una quantità eguale alla lunghezza naturale (supponendo che la legge della proporzionalità degli allungamenti alle tensioni duri sino a quel limite). Siccome in tal caso la tensione T cresce e misura l'elasticità del filo nella già detta circostanza, il coefficiente E dicesi coefficiente di elasticità, ed è l'elasticità opposta alla tensione dal filo di sezione 1 allungato di una quantità eguale alla sua lunghezza naturale. E sarà pure eguale alla elasticità opposta alla compressione dalla verga di sezione 1 che vogliam ridurre alla metà della sua lunghezza naturale.

Il coefficiente α chiamasi coefficiente di estensibilità o di compressibilità, onde viene che il coefficiente di elasticità è inverso del coefficiente di estensibilità o di compressibilità.

Sia il peso P applicato nel punto D del filo estensibile AD di cui è ω^2 la sezione, l la lunghezza naturale, α il coefficiente di estensibilità, ρ il peso dell'unità di lunghezza. Siccome ciascuna sezione C è aggravata dal peso P e dal peso della porzione CD del filo sottostante, la tensione crescerà in tutti i punti, e quindi ogni porzione BC infinitamente piccola del filo si allungherà in diversa

137

proporzione. Cioè dal punto D per origine, e si scriva già x sull'asse del filo a partire da D; sarà per la regione C, $x = CD$: e la tensione per questa regione sarà evidentemente il peso P + il peso della porzione CD che è px. Dunque la tensione per la regione C sarà $P + px$. Se ora consideriamo la porzione CB infinitamente breve del filo, potremo riguardare per quel tratto la tensione come costante, perchè il peso della parte CB è infinitamente piccolo. Quindi l'allungamento della porzione infinitesima CB sarà secondo la formola (a) $\Delta dx = \frac{\alpha(P+px)dx}{\omega^2}$. Ora Δdx è il differenziale dell'allungamento totale e si può scrivere $d.\Delta x$; avremo dunque $d.\Delta x = \frac{\alpha(P+px)dx}{\omega^2}$. Quindi l'allungamento della parte CD, $\Delta x = \frac{\alpha}{\omega^2}\int(P+px)dx = \frac{\alpha}{\omega^2}(Px + \frac{1}{2}px^2) = \alpha\frac{Px+\frac{1}{2}px^2}{\omega^2}$

Per avere l'allungamento del filo totale AD bisognerà prendere questo integrale fra i limiti 0 e l: onde avremo.

$$\Delta l = \frac{\alpha(Pl+\frac{1}{2}pl^2}{\omega^2} = \alpha\frac{Pl}{\omega^2} + \frac{1}{2}\alpha\frac{pl\times l}{\omega^2}.$$

Cioè l'allungamento del filo è eguale all'allungamento dovuto al peso P più quello che sarebbe dovuto alla metà del peso del filo supposto concentrato in D. Ovvero è eguale all'allungamento che dovrebbe aver un peso applicato in D, eguale al peso P più il peso della metà del filo.

Chiaramente in questo modo si è ottenuto che l'accorciamento di una verga verticale alla cui estremità superiore sia applicato un peso P è eguale all'accorciamento che si avrebbe, se la verga fosse senza peso, e al peso P si sostituisse un altro eguale a $P + \frac{1}{2}M_1$; se M_1 ovvero chiamiamo il peso reale della metà della verga, o meglio la metà del peso della verga totale. È inutile l'osservare

che tanto il filo quanto la verga si suppongono omogenei, cioè della stessa materia in tutta la loro lunghezza, e che la loro grossezza si suppone costante.

Scriveremo qui in fine la tavola dei coefficienti di estensibilità o compressione α, e dei coefficienti di elasticità E per alcune materie più in uso: avvertendo che l'unità di sezione è il millimetro quadrato e l'unità di peso il Chilogrammo.

Tavola dei coefficienti di estensibilità e di elasticità per alcune materie.

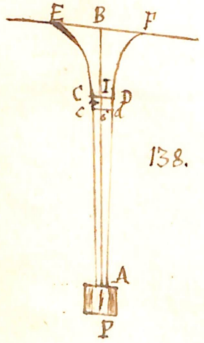
Materie	α Coeff di estensibilità	E Coeff di elasticità
		Chilogrammi
Ferro fuso	0,00008664	11542.
Ferro battuto in isprangbe.	0,00005166	19357.
Fili di ferro	0,00005790	17271.
Legno di Quercia	0,00074614	1339.
Legno di Pino	0,0010000	1000.

LEZIONE XLIV.

Problemi riguardanti l'estensibilità e la tensione dei corpi – Tensioni di più fili estensibili sostenenti un piano rigido, e pressioni di più sostegni compressibili reggenti un piano di egual natura; supponendo il piano gravato di un peso – Moduli di tenacità e di elasticità.

Se la tensione sofferta da un filo nella sua sezione normale di area ω^2 è T, siccome si suppone che tutte le porzioni di quest'area siano uniformemente aggravate, l'unità dell'area di quella sezione soffrirà la tensione $\frac{T}{\omega^2}$. Ciò posto si domanda qual è la figura che deve darsi ad un filo, aggravato da un peso nella sua estremità inferiore, perchè in qualunque sezione la tensione sofferta dall'unità dell'area sia sempre dal medesimo numero.

Sia AEF la figura del filo e della colonna sostenente il peso P, BA il suo asse; sia CD una sezione qualunque del filo, che chiameremo ω^2; IA la sua distanza dal punto A cui è applicato il peso e che chiameremo x. La tensione essendo variabile per le varie sezioni si avrà generalmente $\omega^2 = F(x)$ essendo $F(x)$ una funzione da determinarsi



138.

Per determinarla osserveremo che la tensione sofferta dalla sezione CD è eguale al peso P più il peso della porzione CDA del filo. Ora il peso di questa porzione sarà eguale al peso specifico del filo supposto omogeneo che chiameremo δ moltiplicato per il volume CDA. Se s'immagina vicinissimo a CD un altra sezione parallela cd sarà CDdc il volume elementare eguale a $\omega^2 \times II' = \omega^2 dx = F(x)dx$. Quindi il volume

AIDC sarà $\int F(x)dx$ e la tensione totale sofferta dalla sezione CD sarà $P+\delta\int F(x)dx$; quindi la tensione sofferta dall'unità di area della sezione sarà $\frac{P+\delta\int F(x)dx}{\omega^2} = \frac{P+\delta\int F(x)dx}{F(x)} = K$, essendo K una costante eguale alla tensione sofferta dall'unità di area. Se ne ricava $P+\delta\int F(x)dx = KF(x)$

Pongasi $\int F(x)dx = y$, essendo y una nuova variabile; sarà $\frac{dy}{dx} = F(x)$; quindi avremo l'equazione differenziale $P+\delta y = K\frac{dy}{dx}$ Ovvero ponendo $y = z - P\frac{1}{\delta}$, ovvero $dy = dz - P$ e $dy = dz$ $dz = K\frac{dz}{dx}$.

Onde $K\frac{dz}{z} = \delta dx$, e integrando $K\log z = \delta x + C$ Essendo C una costante arbitraria. Si ha quindi $z = e^{\frac{\delta}{K}x + \frac{C}{K}} = Me^{\frac{\delta}{K}x}$, $y = Me^{\frac{\delta}{K}x} - \frac{P}{\delta}$

dove abbiamo fatto $e^{\frac{C}{K}} = M$. Siccome poi $y = \int F(x)dx$ si avrà $F(x)$ differenziando y rispetto ad x noi avremo così.

$$F(x) = \omega^2 = M\frac{\delta}{K}e^{\frac{\delta}{K}x} = Ne^{\frac{\delta}{K}x}$$

se $N = M\frac{\delta}{K}$. vedesi questa essere una funzione logaritmica, e le aree delle sezioni avere per logaritmi le distanze IA moltiplicate per la costante $\frac{\delta}{K}$. Per determinare la costante arbitraria N si può osservare che se si chiama a^2 la sezione infima cui è attaccato il peso, la sua tensione sarà P, e si dovrà avere $K = \frac{P}{a^2}$ onde $a^2 = \frac{P}{K}$. Per $x = 0$ si dee avere $\omega^2 = a^2 = \frac{P}{K}$; quindi si dovrà $\frac{P}{K} = Ne^0$, $N = \frac{P}{K}$. E quindi l'espressione delle sezioni in funzione della loro distanza da A, $F(x) = \omega^2 = \frac{P}{K}e^{\frac{\delta}{K}x}$.

Che se si volesse prendere B per origine e fare $BI = x'$ se ne ricaverebbe diminuendo l la lunghezza BA del filo $x + x' = l$, $x = l - x'$ e quindi

$$\omega^2 = \frac{P}{K}e^{\frac{\delta}{K}l}\cdot e^{-\frac{\delta}{K}x'}$$

Facendo $x' = 0$ si trova che l'area della sezione EF è $\frac{P}{K}e^{\frac{\delta}{K}l}$. Per la sezione diminuisce fino ad $x = l$, ove essa è $\frac{P}{K}$. Se chiamasi A la sezione EF sarà

$\frac{p}{k} e^{\frac{\delta}{k} l} = A$, $\omega^2 = A e^{\frac{\delta}{k} x'}$ $\therefore$ $e^{-\frac{\delta}{k} x} \omega^2 = A$. Onde quando si faccia x' grandissimo, ω^2 sarà piccolissimo, poichè A si suppone una base costante. Ed essendo del resto $\frac{p}{k} e^{\frac{\delta}{k} l} = A$, se x' è grandissimo converrà che sia ancora l grandissimo perchè bisogna che $x' > l$. In conseguenza $\frac{p}{k}$ sarà una quantità piccolissima, e se k si suppone dato e finito, bisognerà che p sia piccolissimo. Dal che si vede che allungando all'infinito il filo, purchè si metta in vece $p = 0$ la pressione k potrà esser finita, e finita l'area A.

Invertendo la direzione del filo e facendone una verga rigida le stesse leggi subsisteranno, e si vedrà che è possibile sopra una base finita erigere una torre infinitamente alta, che tuttavia non faccia soffrire a ciascun suo strato che una pressione finita ed uniforme per tutta la torre. Ma questa torre sarebbe solo un concetto matematico, poichè ad una certa altezza diventerebbe tratto tratto da non potersi costruire.

Se si suppone che il filo sia un solido di rivoluzione chiamando z il raggio di una sezione qualunque si avrà $\omega^2 = \pi z^2$ e $\pi z^2 = \frac{p}{k} e^{\frac{\delta}{k} l} e^{-\frac{\delta}{k} x'}$

Siccome chiamando R il raggio della base superiore EF si ha $\pi R^2 = \frac{p}{k} e^{\frac{\delta}{k} l}$.

se segue $\pi z^2 = \pi R^2 e^{-\frac{\delta}{k} x'}$ ed estraendo la radice quadrata

$$z = R e^{-\frac{\delta}{2k} x'}.$$

Sarà questa l'equazione della curva generatrice del filo in cui $z = ID$ sia l'ordinata, $x' = BI$ l'ascissa.

Abbiamo parlando della scomposizione delle forze parallele accennato come la scomposizione di una forza in più parallele applicate a più punti di un piano sia indeterminata, se tali punti sono più di 3 (Lez XIV e XIII)

Tenendo però conto dell'allungamento o della compressione il problema si determina. Sia per es. una tavola orizzontale rigida gravata da un peso P e sostenuta da n sostegni di eguale altezza e verticali, aventi i loro piedi nel piano xy, nei punti le cui coordinate sono $x_1 y_1$, $x_2 y_2$; $x_3 y_3$ ... ecc. Siano p_1 p_2 p_3 .... le pressioni sofferte dai rispettivi sostegni; α_1 α_2 α_3 .... i rispettivi coefficienti di compressibilità; ω_1^2 ω_2^2 ω_3^2 ..... le rispettive sezioni normali; l la lunghezza comune di tutti i sostegni. Noi potremo considerare le pressioni sofferte dai singoli sostegni come un sistema di forze parallele equilibrante il peso P; laonde chiamando X Y le sue coordinate (Z sarebbe $= l$) noi avremo.

$$\left.\begin{aligned} P &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \ldots \\ PX &= p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 \ldots \\ PY &= p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 + p_4 y_4 \ldots \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Dalla teoria delle forze parallele (Lez XIV). Ora il piano della tavola essendo rigido, se noi la consideriamo dopo che per la pressione del peso P, e la compressione dei sostegni avrà cangiato luogo la sua equazione sarà divenuta

$$z = ax + by + c.$$

Essendo a, b, c, da determinarsi; ond'è che dopo la compressione le estremità dei sostegni dovranno trovarsi su quel piano e soddisfare a quell'equazione. Ma le coordinate dell'estremità superiore del sostegno premuto dalla pressione p_1 se prima erano x_1, y_1, dopo saranno divenute x_1, y_1, $l - \Delta l$ ovvero x_1, y_1, $l\left\{1 - \frac{\alpha_1 p_1}{\omega_1^2}\right\}$; onde si avrà l'equazione $l\left\{1 - \frac{\alpha_1 p_1}{\omega_1^2}\right\} = ax_1 + by_1 + c$. Lo stesso potendosi ripetere per gli altri sostegni segue dagli n sostegni dati si avranno le n equazioni.

$$\left.\begin{aligned} l\left\{1-\frac{\alpha_1 P_1}{\omega_1^2}\right\} &= ax_1+by_1+c. \quad ; \quad l\left\{1-\frac{\alpha_2 P_2}{\omega_2^2}\right\} = ax_2+by_2+c. \\ l\left\{1-\frac{\alpha_3 P_3}{\omega_3^2}\right\} &= ax_3+by_3+c \quad ; \quad l\left\{1-\frac{\alpha_n P_n}{\omega_n^2}\right\} = ax_n+by_n+c. \\ \cdots\cdots\cdots & \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \text{ec.} \end{aligned}\right\} (b)$$

Le n equazioni (b) congiunte con le 3 eq. (a) danno il modo di determinare le n incognite $P_1\ P_2\ P_3 \cdots$ e le 3 indeterminate a, b, c: onde dopo averle risolute si avranno ad un tempo, e le pressioni dei singoli sostegni, e la posizione della tavola dopo la compressione. È inutile qui avvertire che abbiamo fatto astrazione dal peso proprio dei sostegni, del quale tuttavia si sarebbe potuto tener ragione valendoci del teorema dimostrato sul fine della precedente lezione.

Se invece di avere una tavola sostenuta, fosse questa sospesa a più fili entrambi la risoluzione del problema non sarebbe stata punto difficile.

Noi abbiamo detto nella Lez precedente che la formola dell'allungamento è solo approssimativamente vera per tensioni molto distanti da quella che basterebbe a schiantare il filo. Bensì l'esperienza ha avvertito che avvicinandosi la tensione a questo limite, gli allungamenti diventano maggiori di quello che sarebbero se seguissero la legge della proporzionalità; e quando la tensione va crescendo giunge a un punto in cui vince e misura la tenacità del filo e lo schianta. Dividendo questa tensione per l'area della sezione del filo si avrà la tensione necessaria a schiantare un filo di sezione 1: e questo dicesi coefficiente di tenacità. Sarà dunque questo coefficiente $T = \frac{T}{\omega n}$ se T è la tensione che vale a schiantare il filo.

Ciò posto è chiaro che se si appenda un filo verticalmente ad una delle sue estremità, esso può allungarsi di tanto finchè il suo peso vinca la resistenza

della sezione suprema. Così chiamando δ il suo peso specifico, M la lunghezza necessaria a produrre l'effetto già detto, sarà $T = M\omega^2\delta$, dove $M\omega^2\delta$ è il peso del filo, T la tensione necessaria a schiantarlo nella parte suprema; ed siccome $T = T\omega^2$ sarà $T\omega^2 = M\omega^2\delta$; $T = M\delta$; e finalmente $M = \frac{T}{\delta}$. Tale è l'espressione numerica di M. Nella quale è da osservarsi che calcolando M in millimetri lineari, e ω^2 in millimetri quadrati; $M\omega^2$ esprimerà numeri; e $M\omega^2\delta$ sarà numericamente il peso assoluto di $M\omega^2$ millimetri cubi di quella sostanza. Perciò per l'omogeneità il peso T dovrà esprimere il peso di millimetri cubi di acqua, o milligrammi, e non chilogrammi; quindi bisognerà moltiplicare T per un milione: e avremo

$T \times 1000000 = M^{metri}\delta$: onde $M = \left(\frac{T \times 1000}{\delta}\right)^{metri}$. Questo numero esprime in metri la lunghezza che deve avere un filo della sostanza il cui coefficiente di tenacità è T perchè appendendolo ad una delle sue estremità si rompa per proprio peso. A questo M viene detto modulo di tenacità.

Nell'ipotesi che gli allungamenti siano costantemente proporzionali alle tensioni, è evidente che se appendasi un filo verticalmente per una delle sue estremità, esso può farsi tanto lungo perchè le parti sue superiori si allunghino per la tensione di quantità eguali alle loro lunghezze naturali fra a questa lunghezza; il peso del filo tendente sarà $a\omega^2\delta$. Chiamasi poi λ una lunghezza piccolissima presa nella parte suprema del filo; n'avrà per l'allungamento di quella parte, detto α il coefficiente di estensibilità, $d\lambda = \frac{\alpha \cdot a\omega^2\delta \cdot \lambda}{\omega^2} = \frac{\alpha \cdot a \cdot d\lambda}{1}$ La quale quantità dovendo per ipotesi essere eguale a λ, avremo $\alpha \cdot a \cdot d\lambda = \lambda$, $a = \frac{1}{\alpha\delta}$; e poichè

$\frac{1}{a} = \varepsilon$ coefficiente di elasticità si avrà $a = \frac{\varepsilon}{\delta}$. Ancora qui se si prende per unità il millimetro, sarà ε espresso in milligrammi e per avere a in metri basterà scrivere $a''' = \frac{\varepsilon \times 1000000}{\delta}$ -; $a''' = \left(\frac{\varepsilon \times 1000}{\delta}\right)^{m}$

La lunghezza a così detta modulo di elasticità.

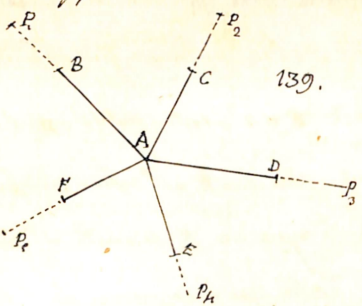
Tavola dei pesi specifici, dei coefficienti di tenacità, e dei Moduli di tenacità e di elasticità per alcune sostanze.

Sostanze	δ	τ	M	a
Ferro fuso	7,2	13	1811^{m}	1603639^{m}.
Ferro battuto in spranghe	7,8	44	5640	2505372.
Filo di ferro	7,5	75	10000	2315155.
Legno di Quercia	1,17	9	7692	1144444.
Legno di Pino	0,65	8	12307	1538461.

LEZIONE XLV.

Equilibrio dei fili flessibili – Equilibrio di più fili concorrenti in un nodo e sollecitati da forze comunque dirette – Caso particolare di 3 fili – Equilibrio di un filo applicato ad un anello scorrevole lungo un altro filo fisso pei suoi 2 capi.

CONCORRANO in A più fili, alle cui estremità $B, C, D \ldots$ siano applicati altrettanti sistemi di forze. Componendo ciascuno di questi sistemi in una risultante unica noviamo applicate nelle estremità tante forze $P_1, P_2, P_3 \ldots$. Perchè il sistema sia in equilibrio bisogna 1° che i fili si dispongano nella stessa direzione delle rispettive forze: di più se i fili sono flessibili bisogna che tutte le forze siano rivolte all'infuori, e se alcuna fosse rivolta all'indentro bisognerebbe che il filo corrispondente fosse rigido. Ciò posto sotto l'azione di queste forze i fili si allungheranno (o comprimeranno se le forze rivolgonsi all'indentro) finchè giunti a un certo limite, il sistema potrà considerarsi come assolutamente rigido. Allora i punti d'applicazione delle forze $P_1, P_2 \ldots$ ec



139.

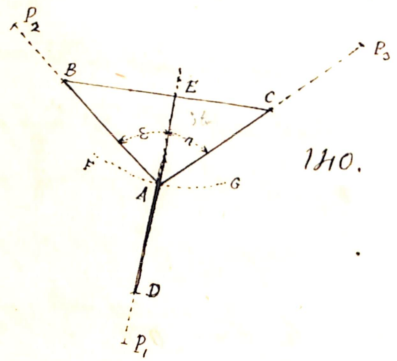
potremmo immaginarci trasportate lungo le direzioni dei fili in A, per l'equilibrio bisognerà dunque che si abbia. $\Sigma P\cos\alpha = 0 \quad \Sigma P\cos\beta = 0 \quad \Sigma P\cos\gamma = 0$ (a)

ritenendo le solite denominazioni. È poi manifesto che la tensione di ciascun filo sarà eguale alla forza applicata alla sua estremità.

Nel caso particolare di 3 fili un ragionamento consimile ci condurrà a concludere che i 3 fili devono tutti giacere nel medesimo piano di più dei 2 sopra.

$P_1 : P_2 : P_3 :: \operatorname{sen} \widetilde{P_2P_3} : \operatorname{sen} \widetilde{P_1P_3} : \operatorname{sen} \widetilde{P_1P_2} :: \operatorname{sen}(\varepsilon+\eta) : \operatorname{sen}\eta : \operatorname{sen}\varepsilon$ (Leg IX)

dove ε ed η sono gli angoli che fra colle forze P_2P_3 il prolungamento del filo della forza P_1. Nel caso in cui $\varepsilon+\eta < 180°$ come nella unita figura, le 3 forze $P_1P_2P_3$ potranno tutte e 3 tirare all'infuori: cioè tutti e 3 i fili potranno ben flessibili. Ma quando $\varepsilon+\eta > 180°$ $\operatorname{sen}(\varepsilon+\eta)$ è negativo, se P_3P_2 sono risolte all'infuori necessariamente bisogna che P_1 risolta all'indentro. Il che porta per conseguenza che il filo AD, dee esser rigido, quando non lo sono AB, AC.



1310.

Ma se P_3 P_2 fossero negative, cioè rivolte all'indentro la proporzione seguente darebbe P_1 positivo; quindi essendo rigidi i tratti AB, AC potrà esser flessibile il tratto AD, sempre nell'ipotesi che $(\varepsilon+\eta) > 180°$. Potrà darsi che ε ed η siano ciascuno maggiori dell'angolo retto: allora $\varepsilon+\eta$ differirà poco finora da 180° nel qual caso le espressioni di P_1 P_2 cioè $P_1 = P\dfrac{\operatorname{sen}\eta}{\operatorname{sen}(\varepsilon+\eta)}$ $P_3 = P_1\dfrac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\operatorname{sen}(\varepsilon+\eta)}$ diventano grandissime

- e diventerebbero infinite se $\varepsilon + \eta = 180°$? Difatti allora P_1 P_2 sarebbero direttamente contrarie, ed è impossibile stabilire l'equilibrio con una 3ª forza non applicata nelle loro direzioni.

Finalmente se il tratto AD fosse attaccato ad un anello scorrevole lungo la BAC formante una fune continua, evidentemente per l'equilibrio bisogna che $\varepsilon = \eta$ Difatti allora il punto A è mobile su un ellissi i cui fuochi sono i punti fissi B e C ai quali supponi attaccata la fune, e il grand'asse è BAC. Per l'equilibrio bisogna che la risultante o la forza P_1 agisca normalmente a quest'ellisse FG Per una proprietà dell'ellissi la normale AE bisecando l'angolo BAC dei raggi vettori segue che per l'equilibrio dovrà essere $\varepsilon = \eta$ Allora le tensioni dei 2 capi fissi BA, AC diventano eguali e le loro espressioni riducendo evidentemente a $P_1 \frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\operatorname{sen} 2\varepsilon} = P_1 \frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{2\operatorname{sen}\varepsilon\cos\varepsilon} = P_1 \frac{1}{2\cos\varepsilon}$. Del resto è chiaro che l'anello A non può equilibrarsi finchè le tensioni dei 2 capi AB AC non siano eguali; e scorrerà sulla fune BAC finchè questa condizione sia compita. L'eguaglianza delle 2 tensioni porta evidentemente la condizione $\varepsilon = \eta$

(Venturoli 179 - 180. Poisson 285 - 287)

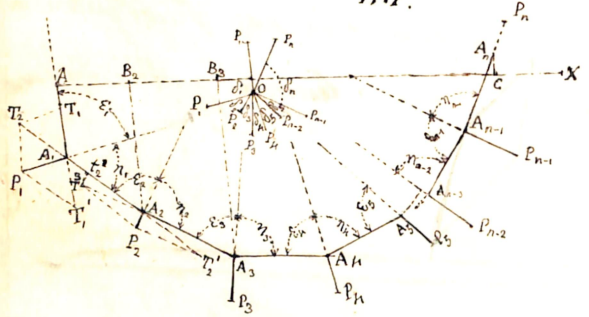
LEZIONE XLVI

Poligono funicolare - Costruzione della figura d'equilibrio del poligono data la grandezza e le direzioni delle forze sollecitanti - Data la figura d'equilibrio del poligono e le tensioni dei lati costruire la grandezza delle forze sollecitanti - Equazioni d'equilibrio del poligono funicolare.

POLIGONO funicolare è un filo flessibile AA_n sollecitato nei suoi 2 estremi A, A_n da 2 forze o dai 2 punti fissi, e sollecitato in qualunque numero di punti intermedi da forze comunque dirette operanti sopra determinati punti del filo, o sopra anelli scorrevoli lungo il filo medesimo.

Supponiamo 1° che siano date le lunghezze dei lati del poligono, le grandezze e le direzioni delle forze che lo sollecitano comprese P e P_n che ritengonsi costantemente applicate in punti fissi, 2° che gli estremi A, A_n del filo siano sostenuti da punti fissi, o siano applicati a punti materiali liberi di muoversi lungo due rette fisse, 3° che il filo sia perfettamente flessibile, cioè che la tensione in ogni punto del filo sia diretta secondo la tangente al filo in quel punto.

141.



Ciò premesso, è evidente che il 1° lato si disporrà nella direzione della forza P: quindi preso un punto qualunque A per origine del poligono condurremo AA_1 eguale al 1° lato e parallela alla forza data P_1. È manifesto che stando in equilibrio il poligono, ciascun lato dovrà stare in equilibrio, quindi ciascuno dovrà esser sollecitato da 2 forze eguali e opposte agenti nella sua direzione. Quindi se alla estremità A intendiamo applicata la forza P_1, bisognerà che questa -

faccia equilibrio ad una forza T_1 eguale e direttamente opposta. Ma ottenuto il punto A_1 ed applicandovi la data forza corrispondente P_1 ne risulterà dalla composizione di P_1 e P trasportata in $A_1 T_1$ la forza $A_1 T_2$: la quale dovendo essere chiusa dalle rimanenti forze la cui azione si trasmette per il 2° lato del poligono, segue che $A_1 T_2$ dovrà giacere nella direttrice del 2° lato del poligono: di cui essendo data la lunghezza sarà facile costruirlo; e sarà $A_1 A_2$. Similmente la forza $A_1 T_2$ trasportata in $A_2 t_2$ e composta colla forza data P_2 applicata in A_2 darà per la risultante agente nella direttrice del 3° lato la $A_2 T_3$: prolungando la quale si ha la giacitura del 3° lato del poligono. È manifesto che procedendo avanti in questo modo si arriverà alla risultante ultima applicata nella direttrice del lato $A_{n-1} A_n$: il quale perchè sia in equilibrio dovrà esser sollecitato dalla forza P_n eguale e direttamente contraria alla risultante di tutte le altre. Ma le successive composizioni fatte nei vertici del poligono, danno la stessa risultante che se le composizioni si facessero tutte intorno a un punto: perchè delle $P P_1 P_2 \ldots$ non si mutano nè le grandezze, nè le direzioni: dunque affinchè il poligono funicolare sia in equilibrio bisogna che le forze che lo sollecitano, supposte trasportate parallelamente a loro stesse col loro punto d'applicazione in un punto comune O si facciano equilibrio intorno al medesimo. Da questa costruzione è manifesto che le tensioni dei singoli lati sono eguali alle successive risultanti $P_1 T_2 . T_3 \ldots$ perchè ciascun lato deve essere in equilibrio sotto la loro influenza, e quella delle forze che vengono dopo quel lato stesso. Dunque la tensione di ciascun lato è eguale alla risultante di tutte le forze a partire da P sino al lato che si considera.

Non meno facile sarebbe il problema inverso: data la figura d'equilibrio e le

tensioni trovare la grandezza delle forze rollevanti. Poichè la tensione del 1° lato darebbe la forza P: applicando questa in A_1, e tirata A_1T_1 eguale alla tensione del 2° lato e nella direttrice di questo si avrebbe in T_1T_1 e quindi in A_1P_1 ad essa parallela, la forza P_1. Trasportando poi A_1T_1 in A_2t_1 e tirando A_2T_2 nella direttrice del lato A_2A_3 e eguale alla sua tensione si avrebbe in t_2T_2 e quindi in A_2P_2 la forza rollevante P_2. E così in avanti si giungerebbe a determinare le singole forze rollevanti, e per ultimo P_n = alla tensione dell'ultimo lato. Volendo scrivere analiticamente le condizioni d'equilibrio del poligono funicolare di lati liberi, è dapprima evidente che ciascuna forza rollevante è posta nel piano dei 2 lati ad essa contigui. Di più ciascun lato stando in equilibrio è rollevato alle sue 2 estremità da 2 forze eguali e direttamente contrarie: Dunque x si scomponga per es. la forza P_1 in 2 dirette secondo i prolungamenti dei lati come $T_1'T_1$ poi si decomponga la forza consecutiva P_2 in 2 secondo i prolungamenti dei lati ad essa contigui, come $T_2'T_2$ è manifesto che per l'equilibrio del lato A_1A_2 bisogna che sia $T_2 = T_2'$. Ora chiamando ε_1 η_1 gli angoli che il prolungamento della P_1 fa coi lati contigui dovrà aversi, se ε_2 η_2 denotino gli angoli che il prolungamento della P_2 fa coi lati ad essa varii.

$$P_1 \frac{\operatorname{sen} \varepsilon_1}{\operatorname{sen}(\varepsilon_1+\eta_1)} = P_2 \frac{\operatorname{sen} \varepsilon_2}{\operatorname{sen}(\varepsilon_2+\eta_2)}$$

Lo stesso si può ripetere rispetto a qualunque altro lato. Quanto al lato 1° AA_1 esso darà $P = AT_1' = P_1 \dfrac{\operatorname{sen} \eta_1}{\operatorname{sen}(\varepsilon_1+\eta_1)}$ Similmente l'ultimo lato darà per la decomposizione della P_{n-1} in 2 secondo i lati contigui $P_n = P_{n-1} \dfrac{\operatorname{sen} \varepsilon_{n-1}}{\operatorname{sen}(\varepsilon_{n-1}+\eta_{n-1})}$

Dunque finalmente l'equilibrio dei 2 lati estremi e quello di ciascuno dei lati

intermedie daremo i 2 sistemi di condizioni (I) e (II)

$$P = P_1 \frac{\operatorname{sen} \eta_1}{\operatorname{sen}(\varepsilon_1 + \eta_1)} \qquad P_n = P_{n-1} \frac{\operatorname{sen} \varepsilon_{n-1}}{\operatorname{sen}(\varepsilon_{n-1} + \eta_{n-1})} \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_1 \operatorname{sen} \varepsilon_1}{\operatorname{sen}(\varepsilon_1 + \eta_1)} &= P_2 \frac{\operatorname{sen} \eta_2}{\operatorname{sen}(\varepsilon_2 + \eta_2)} & \frac{P^2 \operatorname{sen} \varepsilon_2}{\operatorname{sen}(\varepsilon_2 + \eta_2)} &= P_3 \frac{\operatorname{sen} \eta_3}{\operatorname{sen}(\varepsilon_3 + \eta_3)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \frac{P_{n-2} \operatorname{sen} \varepsilon_{n-2}}{\operatorname{sen}(\varepsilon_{n-2} + \eta_{n-2})} &= P_{n-1} \frac{\operatorname{sen} \eta_{n-1}}{\operatorname{sen}(\varepsilon_{n-1} + \eta_{n-1})} & & \end{aligned}\right\} \quad (II)$$

Oltre a queste relazioni altre ne esistono fra gli angoli di ciascuna forza coi lati del poligono, e gli angoli delle forze fra di loro. Nel caso in cui il poligono e le forze non siano contenute tutte in un piano queste relazioni sono molto complicate; ma allorchè il poligono e le forze sono tutte nello stesso piano, è manifesto che prolungando 2 forze consecutive sino a che le loro direzioni si incontrano, si avrà dal triangolo formato da loro e dal lato fra le stesse compreso la condizione che la somma degli angoli da loro fatti col lato e dell'angolo delle 2 forze è eguale a 2 retti. Per le forze estreme si ha chiamando δ l'angolo della forza P colla P_1 e δ_n l'angolo della P_{n-1} colla P_n

$$\delta + \varepsilon_1 = 180^\circ \quad \ldots\ldots\ldots \quad \delta_n + \eta_{n-1} = 180^\circ \quad (III)$$

e per le intermedie chiamando δ_q l'angolo delle forze P_{q-1} P_q fra loro.

$$\left.\begin{aligned} \delta_2 + \eta_1 + \varepsilon_1 &= 180^\circ & \delta_3 + \eta_3 + \varepsilon_3 &= 180^\circ & \delta_n + \eta_n + \varepsilon_n &= 180^\circ \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots & & \delta_{n-1} + \eta_{n-1} + \varepsilon_{n-1} &= 180^\circ \end{aligned}\right\} \quad (IV)$$

Ora quando date le P_1 forze P_2 .... si vuol costruire in un piano la figura di equilibrio

Del poligono si hanno le eq^ni (I), (II), (III) (IV) in tutto di numero $2n$! mentre gli angoli incogniti $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1}\ \eta_1\ \eta_2 \dots \eta_{n-1}$ sono solo $2n-2$ Ciò significa che eliminando le $2n-2$ indeterminate avremo 2 equazioni di condizione che esprimeranno precisamente che supponendo le dette forze tutte trasportate col punto di applicazione in O esse devono equilibrarsi. Le 2 condizioni che ci mancano e che dovranno esser soddisfatte per identità dovranno quindi esprimere

$$\Sigma P \cos\alpha = 0 \qquad \Sigma P \cos\beta = 0.$$

Ove ritengansi le solite denominazioni, e gli assi si prendano nel piano del poligono. Quando queste 2 ultime condizioni saranno soddisfatte per identità l'equilibrio sarà possibile, e si potrà determinare gli angoli incogniti. Invece quando sono date le tensioni dei singoli lati, e la figura d'equilibrio del poligono eliminando $T_1\ T_2\ T_3$ queste tensioni, le eq^ni per avere le grandezze e le direzioni delle forze rotolanti saranno.

$$T_1 = P\ ;\ T_1 = P_1 \frac{\operatorname{sen}\eta_1}{\operatorname{sen}(\varepsilon_1+\eta_1)}\ ;\ T_2 = P_1 \frac{\operatorname{sen}\varepsilon_1}{\operatorname{sen}(\varepsilon_1+\eta_1)}\ ;\ T_2 = P_2 \frac{\operatorname{sen}\eta_2}{\operatorname{sen}(\varepsilon_2+\eta_2)}\ ;$$

$$T_3 = P_2 \frac{\operatorname{sen}\varepsilon_2}{\operatorname{sen}(\varepsilon_2+\eta_2)}\ ;\ T_3 = P_3 \frac{\operatorname{sen}\eta_3}{\operatorname{sen}(\varepsilon_3+\eta_3)}\ ; \dots\ T_n = P_{n-1} \frac{\operatorname{sen}\varepsilon_{n-1}}{\operatorname{sen}(\varepsilon_{n-1}+\eta_{n-1})}\ ;\ T_n = P_n$$

Di più se come gli angoli $\gamma_1\ \gamma_2 \dots \psi_{n-1}$ del poligono sono conosciuti avremo

$$\varepsilon_1+\eta_1 = \gamma_1 \quad \varepsilon_2+\eta_2 = \gamma_2 \quad \dots\dots \quad \varepsilon_{n-1}+\eta_{n-1} = \psi_{n-1}$$

In tutto sono $2n+n-1 = 3n-1$ eq^ni fra $3n-1$ incogniti (cioè le $n+1$ incognite $P_1\ P_2 \dots$ e le $2n-2$ $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \dots\ \eta_1\ \eta_2 \dots$) onde il poligono può dirsi completamente determinato.

(Venturoli 181–184. Poisson Ibidem)

LEZIONE XLVII

Equilibrio del poligono funicolare di uno o di ambo i termini fissi – Caso in cui uno o 2 termini sono obbligati a scorrere sopra delle curve – Equilibrio del poligono funicolare chiuso – Caso in cui il poligono è regolare o diventa un circolo – Caso in cui vi siano degli anelli scorrevoli.

È TUTTO ciò pel poligono funicolare di termini liberi. Supponiamo ora che il termine A sia legato a un punto fisso: alla forza P si sostituirà la resistenza di A, le cui intensità e direzione si supporranno ignote. Dunque i quattro sistemi (I) (II) (III) (IV) che fra tutti comprendono $2n$ eq. comprenderanno ora $(2n-2)+2$ o sia incognite rappresentate le nuove P e δ cosicchè non vi saranno più eq. da sodisfarsi per identità ma si potrà costantemente determinare P e δ in modo che l'equilibrio esista.

Dunque ora dei nuovi fissi ambo i termini del poligono A ed A_n: delle $2n-2$ incognite del problema nel caso dei termini liberi si aggiungeranno ora nuove indeterminate P, δ, η_n e δ_n. Se ora sul piano del poligono si condurranno per A 2 assi ortogonali e sia AX l'asse x; essendo nota la posizione dei 2 termini non conosceremo l'ordinata $A_nC = b$ e l'ascissa $AC = a$ del punto A_n. Se ora si consideri che la somma algebrica delle proiezioni di tutti i lati del poligono sull'AX è eguale ad AC, avremo dinominando ξ_y l'angolo di un lato qualunque del poligono con AC, il quale ξ_y può determinarsi in funzione di ε, η, ε_n η_n ... ecc. Troveremo che se dinominando l_1 l_2 l_3 ... le lunghezze dei singoli lati

$$a = l_1 \cos\xi_1 + l_2 \cos\xi_2 + l_3 \cos\xi_3 + \ldots = \Sigma l \cos\xi \quad \ldots (a)$$

Similmente con poca attenzione si può vedere che l'ordinata A_n'' è la somma algebrica delle proiezioni dei singoli lati sull'asse oy, e ricordo le proiezioni sono negative quando i lati fanno angoli ottusi coll'asse y otteremo similmente

$$b = l_1 \cos\nu_1 + l_2 \cos\nu_2 + l_3 \cos\nu_3 + \ldots = \Sigma l \cos\nu \quad \ldots (b)$$

Le eq (a) e (b) congiunte colle 2n dei sistemi (I) ... (IV) danno il modo di determinare sempre le 2n-2 incognite della eq precedente (cioè le n coppie $P_1 S_1 \; P_n S_n$) che sono in tutto 2n+2. Questo sono le condizioni d'equilibrio del poligono di termini fissi.

Supponiamo ora che il termine A sia normale per una data linea anche curva posta nel piano del poligono e della quale si ha l'eq. Allora evidentemente S_1 e P_n saranno ignoti: tuttavia so per esperienza che la direzione della P deve esser normale alla curva potremo dirle questa condizione determinare le coordinate del punto della curva ove deve collocarsi l'anello A. Si determinerà così il punto evidentemente si ricadrà nel caso in cui A si considera come fisso e i 2 termini fisso anche normali lungo 2 curve potremo determinare le posizioni di A e di A_n dette le condizioni che P e P_n debbono esser normali alle rispettive curve. Determinate queste 2 nuove posizioni si ricade nel caso in cui ambo i termini siano fissi.

Se fingasi ora che il poligono sia chiuso congiungendo i termini A e A_n è evidente che le 2 eq (I) relative ai lati estremi più non varranno, ma essendo

n il numero dei vertici del poligono si avranno n eq (II) cioè una per ciascun vertice. Avendo inoltre le n eq (III) per relative ai lati estremi: ma si avranno $\frac{n}{2}$ eq (IV). Onde le eq. saranno ancora $2n$. Oltre a queste il poligono deve essere chiuso prendendo A per origine delle coordinate sarà $a=0$ $b=0$. $\Sigma l\cos\xi = 0$ $\Sigma l\cos\nu = 0$.

Onde esprimendo $\xi_1\ \xi_2 \dots\ \nu_1\ \nu_2 \dots$ in funzione di $\varepsilon_1\ \eta_1\ \delta_1$; $\varepsilon_2\ \eta_2\ \delta_2 \dots$ si avranno $2n+2$ eq. d'equilibrio. Se fossero date le grandezze delle forze sollecitanti e le loro direzioni fra le $2n$ incognite che si avrebbero $\varepsilon_1\ \eta_1$; $\varepsilon_2\ \eta_2$; $\varepsilon_3\ \eta_3 \dots\ \varepsilon_n\ \eta_n$ si avrebbero $2n+2$ eq. di cui $2n$ determinerebbe le incognite e le altre 2 dovrebbero esser soddisfatte per identità, ed esprimono che tutte le forze sollecitanti applicate ad un sol punto debbono farsi equilibrio.

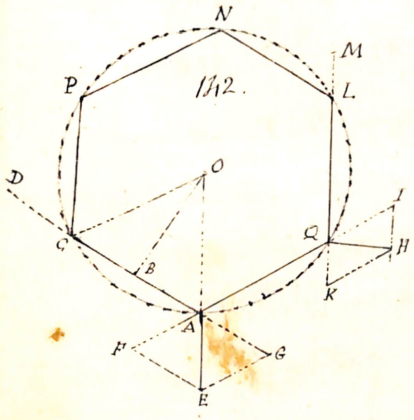
Nel caso particolare in cui il poligono sia regolare, chiamando α il numero dei lati sarà $\varepsilon_1 + \eta_1 = 180° - \frac{360°}{n} = \varepsilon_2 + \eta_2 = \varepsilon_3 + \eta_3 = \dots = \varepsilon_n + \eta_n$ onde allora la eq. (II) in numero di n diventata,

$$p_1 \frac{\operatorname{sen}\varepsilon_1}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}} = p_2 \frac{\operatorname{sen}\eta_2}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}\ ;\ \text{ovvero}$$

$p_1 \operatorname{sen}\varepsilon_1 = p_2 \operatorname{sen}\eta_2$; e così pure

$p_2 \operatorname{sen}\varepsilon_2 = p_3 \operatorname{sen}\eta_3$; . . . . . .

Nel caso particolare in cui le forze sollecitanti siano dirette al centro del poligono si avrà $\varepsilon_1 = \eta_1 = \varepsilon_2 = \eta_2 = \varepsilon_3 = \eta_3 = \dots = 90° - \frac{2\pi}{2n} = 90° - \frac{\pi}{n}$.



Quindi se ne ricava $P_1 = P_2 = P_3 \ldots$ Le tensioni dei singoli lati saranno tutte eguali ed espresse da $T = P \frac{\operatorname{sen} 90° - \frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}} = \frac{P}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}$ onde si ricava $2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{P}{T}$. Ma si ha ancora $2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = 2 \operatorname{sen} COB = 2 \frac{CB}{CO} = CA : CO$

Dunque $P : T :: CA : CO$; così la forza P applicata in ciascuno degli angoli sta alla tensione come il lato del poligono al raggio del circolo circoscritto. Se chiamasi Π la forza totale o la somma delle forze sollecitanti che è nP: avremo $T = \frac{nP}{2n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} = \frac{\Pi}{2n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}$;

$$T = \frac{1}{2} \Pi \left\{ \pi - \frac{\pi^3}{1.2.3.n^2} + \frac{\pi^5}{1.2.3.4.5.n^4} \ldots \right\}^{-1}.$$

Ora evidentemente quanto più grande è n, portando Π costante tanto più grande diventa il denominatore, e tanto più piccolo diventa T; Varignon ha per la tensione dell'elemento infinitamente piccolo di un circolo sollecitato dalla forza Π ripartita in tante piccole forze dirigenti costantemente al centro alla periferia e dirette al centro del circolo; l'espressione $\frac{\Pi}{2\pi}$.

Il che del resto si può vedere nella proporzione $P : p :: CA : CO$ poichè si può essa scrivere sotto la forma $nP : T :: nCA : CO$. Or nCA è il perimetro p del poligono; e $nP = \Pi$: Sarà dunque $\Pi : T :: 2\pi : 1$. onde $T = \frac{\Pi}{2\pi}$. Scorgesi dalle eq.ni di condizione soprascritte, che il poligono regolare PMA può anche stare in equilibrio quando le forze sollecitanti non sono dirette verso il centro, nè sono eguali fra loro. Infatti se agiscano dei sistemi nei singoli lati IQ, QA, AC, ~~si applicheranno~~ ~~dei sistemi~~ i sistemi di forze eguali rispettivamente contrarie DC, AG; AF, QI; CK, LM, ecc. componendo 2 a 2

le forze applicate o ciascun angolo si avranno le forze rotolanti GH, AE, ecc. sotto il cui rispetto il poligono sarà in equilibrio, qualunque del resto siano le forze DC AG; AF GI; GK LM. ecc.

Noi dobbiamo ancora considerare il caso in cui in un poligono articolare piano qualunque una forza P_s non sia applicata ad un nodo o angolo del poligono, ma ad un anello scorrevole. È evidente che affinchè essa si costituisca in equilibrio bisogna che si abbia $\varepsilon_s = \eta_s$ Questa nuova condizione aggiunta alle (I) . . (IV) dà un eq.° di troppo se i termini siano liberi: cioè quando anche le condizioni $\Sigma P' \cos\alpha = 0$ $\Sigma P \cos\beta = 0$ siano soddisfatte per identità, generalmente l'equilibrio non potrà sussistere. Lo stesso dicasi per un numero qualunque di forze applicate ad anelli scorrevoli lungo il poligono

Però se supponi che i termini del poligono siano fissi (al qual caso si riduce quello del poligono chiuso) siccome in oltre ai sistemi (II) (IV) d'equazioni pel poligono chiuso e ai sistemi (I) . . (IV) se il poligono è aperto bisogna ancora soddisfare alle eq.ni $\Sigma l \cos\xi = 0$ $\Sigma l \cos\nu = 0$ nell'1° caso e alle $\Sigma l \cos\xi = a$ e $\Sigma l \cos\xi = b$ nel 2°: è manifesto che uno o 2 anelli scorrevoli danno uno o 2 eq.ni di più rispetto agli angoli: ma davanno fra i lati una o 2 incognite di più. Ora i lati entrando nelle ultime eq.ni che abbiamo scritto, il numero delle incognite in tredotte pareggerà quello delle incognite eliminate, e si potranno trovare le condizioni dell'equilibrio

Ma se gli anelli considerati sono più di 2, secondo 2 soli eq. comprendono i lati, ci sono più di 2 lati incogniti, ed il problema rispetto ad essi diventerà indeterminato: mentre troppo determinato diventa rispetto agli angoli poichè si aggiungono pure di 2 eq. alle 2n che contengono gli angoli. Il problema sarà dunque impossibile.

Finalmente se alcuno dei lati del poligono fosse estensibile, come l_s, chiamando T_s ω_s α_s la sua tensione, la sua sezione, il suo coefficiente di estensibilità, esso si comporrebbe in $l_s + l_s \frac{\alpha_s T_s}{\omega_s^2} = l_s \left\{ 1 + \frac{\alpha_s T_s}{\omega_s^2 E} \right\}$ (Eq. XLIII) e quindi concorrerebbe alle eq. (a) e (b) riguardanti il poligono di tensioni fisse sostituendo a l_s questo suo valore, poichè le eq. rappresentano le vere condizioni del problema. Nei poligoni di lati flessibili le forze debbono tutte dirigersi all'infuori; nei poligoni di lati rigidi semplicemente appoggiati gli uni contro gli altri debbono dirigersi tutte all'indentro; possono indifferentemente dirigersi all'infuori o all'indentro quando i lati rigidi si congiungono a modo. Quando le forze sono dirette all'infuori, l'equilibrio è stabile: instabile nel caso contrario. Quando tutti i lati rigidi fossero applicate delle forze, non accadrebbe trasformazioni che possono sempre ridursi agli angoli.

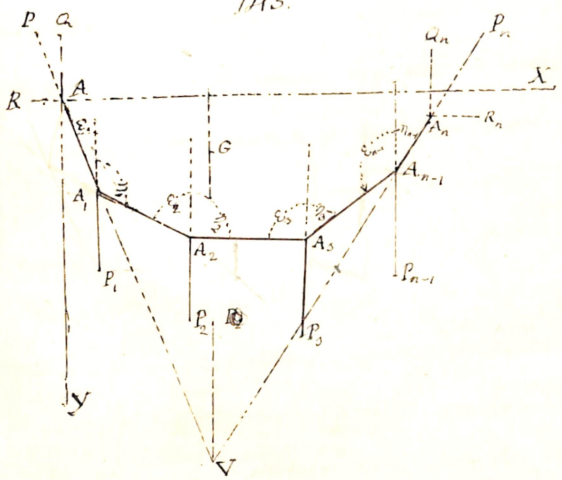
(Venturoli 188-89-84: Poisson 288-289)

LEZIONE XLVIII.

Equilibrio del poligono funicolare carico di pesi o sollecitato da forze parallele – La tensione orizzontale è costante – La tensione assoluta di ciascun lato è inversamente proporzionale al seno del suo angolo colla verticale – Le direzioni dei lati estremi prolungati si incontrano sulla verticale del centro di gravità dei pesi – Nel poligono equilibrato il centro di gravità è il più basso possibile

FRA i varii casi di poligono funicolare merita speciale considerazione quello in cui le forze P_1 P_2 .... applicate ai vertici del poligono sono tra di loro parallele, rimanendo le 2 estreme P e P_n sempre nelle direzioni dei lati estremi del poligono: come avviene per es. quando le forze applicate agli angoli sono attrattanti pesi. In questo come negli altri casi se si immaginano trasportate tutte le forze attorno a un punto esse devono fare equilibrio: or decomponendo le P, P_n in 2 una verticale l'altra orizzontale, siccome le 2 R, R_n sono le forze orizzontali del sistema esse devono fare separatamente equilibrio onde sarà:

1115.



$R = R_n$ ovvero ciò che è lo stesso $P \operatorname{sen} PAQ = P_n \operatorname{sen} P_n A_n Q_n$: o ancora $P \operatorname{sen} \varepsilon_1 = P_n \operatorname{sen} \eta_{n-1}$. Tutte le forze verticali dovranno similmente fare equilibrio epperò le $2P$ e P_n dovranno esser volta all'una: cioè poi si dovrà avere $Q + Q_n = P_1 + P_2 + P_3 + P_n + \cdots + P_{n-1}$. O ciò che è lo stesso ora $P \cos \varepsilon_1 + P_n \cos \eta_{n-1} = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_{n-1}$. Cercheremo adunque che le tensioni orizzontali dei 2 lati estremi devono esser eguali e contrarie; che la somma delle tensioni verticali dei medesimi è eguale e contraria alla somma di tutti i pesi e volta in contrario verso.

Se ora consideriamo il poligono equilibrato dovremo di leggieri che esso deve star tutto nel medesimo piano verticale. Di più potendosi esso nello stato d'equilibrio considerare come un sistema rigido in equilibrio risulterà che le forze ad esso applicate si faranno equilibrio. Se i pesi poligono imbuderà tutti accumulati nel centro loro di gravità G; avremo dunque nel piano del poligono 3 forze, cioè la somma dei pesi e P_1 P_n che debbono equilibrare. Dunque la risultante delle P_1 P_n deve esser eguale e direttamente contraria alla somma dei pesi applicata in G. Ciò non può essere se non quando si hanno le 2 condizioni sopra scritte e di più le 3 forze debbono imbuderà in uno stesso punto. È adunque poiché da prolungando le direzioni delle P P_n queste rincontrino in un punto V della direzione della forza applicata in G, la qual direzione è la verticale GV. È dunque necessario per l'equilibrio del poligono che prolungando fino all'altro incontro le direzioni dei 2 lati estremi, questi passati di concorso si trovi sulla verticale dell'centro G di gravità dei pesi d'eudenti il poligono.

Ancora per questo caso come pel caso generale della Leg XLVI la tensione di un lato qualunque è eguale alla risultante delle forze applicate al poligono a partire da A sino al lato che consideri, che questa risultante poi è lato l_s compreso fra A_{s-1} e A_s ha evidentemente per componente orizzontale R, per componente verticale $-Q + P_1 + P_2 + \cdots + P_{s-1}$. Onde immediatamente si conclude che la componente orizzontale della tensione di qualunque lato è costante. Sia T_s la tensione del lato l_s; siccome l'angolo che esso fa colla verticale è stato da noi chiamato ε_s si avrà $T_s \operatorname{sen} \varepsilon_s = R = P \operatorname{sen} \varepsilon_1$, ove è la tensione orizzontale costante di tutti i lati. Onde si ricava $T_s = \frac{R}{\operatorname{sen} \varepsilon_s}$; la qual formola esprime che la tensione sopportata da ciascun lato è inversamente proporzionale al seno dell'angolo che fa quel lato con la verticale.

Quando ai vari vertici è evidente che non vi sia più che uno e che questi due necessariamente trovarsi al punto più basso del poligono, è ancora chiaro per la natura delle forze sollecitanti che il poligono è necessariamente convesso dalla parte inferiore. Quando i lati invece di esser flessibili fossero rigidi il poligono potrebbe esser capovolto e volger la concavità all'ingiù, nel qual caso l'equilibrio sarebbe instabile. Le condizioni d'equilibrio ad ogni modo sarebbero sempre le stesse, il che vuol dire pure pel poligono qualunque: l'unica diversità sta in ciò che nel caso dei lati flessibili essi possono esser tesi dalle forze date all'ingiuori ma non premuti; mentre quando i lati sono rigidi e opportunamente appoggiati gli uni contro gli altri è necessario che le forze si dirigano nell'interno del poligono e che i lati siano premuti.

Per stabilire le condizioni d'equilibrio del poligono funicolare carico di pesi

incominceremo ad osservare che per ipotesi $P_1 = Q$ e $P_{n-1} = Q_{n-1} = O$

$$P_1 \frac{\operatorname{sen} \varepsilon_1}{\operatorname{sen}(\varepsilon_1 + \eta_1)} = P_{n-1} \frac{\operatorname{sen} \varepsilon_{n-1}}{\operatorname{sen}(\varepsilon_{n-1} + \eta_{n-1})} = P_n$$ Forza di spinta normale agente

come nel caso di un poligono qualunque

$$P_{q-1} \frac{\operatorname{sen} \varepsilon_{q-1}}{\operatorname{sen}(\varepsilon_{q-1} + \eta_{q-1})} = P_q \frac{\operatorname{sen} \eta_q}{\operatorname{sen}(\varepsilon_q + \eta_q)}$$

Or dal parallelismo delle direzioni dei pesi risulta evidentemente che si ha

$\eta_q = \varepsilon'_{q+1} = 180°$; $\eta_{q-1} = \varepsilon'_q = 180°$; eliminando così tutti gli η, si ha

$$P_{q-1} \frac{\operatorname{sen} \varepsilon_{q-1}}{\operatorname{sen}(\varepsilon_{q-1} + \eta_{q-1})} = P_q \frac{\operatorname{sen} \varepsilon_{q+1}}{\operatorname{sen}(\varepsilon'_{q+1} + \varepsilon_q)}$$

Ovvero $$P_{q-1} \frac{\operatorname{sen} \varepsilon_{q-1}}{\operatorname{sen} \varepsilon_q \cos \varepsilon_{q-1} \mp \cos \varepsilon_q \operatorname{sen} \varepsilon_{q-1}} = P_q \frac{\operatorname{sen} \varepsilon'_{q+1}}{\operatorname{sen} \varepsilon'_{q+1} \cos \varepsilon_q \mp \cos \varepsilon'_{q+1} \operatorname{sen} \varepsilon_q}$$

Moltiplicando d'ambe le parti per $\operatorname{sen} \varepsilon'_q$ si ottiene

$$P_{q-1} \frac{\operatorname{sen} \varepsilon_{q-1} \operatorname{sen} \varepsilon'_q}{\operatorname{sen} \varepsilon_q \cos \varepsilon_{q-1} - \cos \varepsilon_q \operatorname{sen} \varepsilon_{q-1}} = P_q \frac{\operatorname{sen} \varepsilon'_q \operatorname{sen} \varepsilon'_{q+1}}{\operatorname{sen} \varepsilon'_{q+1} \cos \varepsilon_q - \cos \varepsilon'_{q+1} \operatorname{sen} \varepsilon_q}$$

e dividendo sotto e sopra per $\operatorname{sen} \varepsilon_{q-1} \operatorname{sen} \varepsilon_q$ nel 1° e per $\operatorname{sen} \varepsilon'_q \operatorname{sen} \varepsilon'_{q+1}$ nel 2° si ha

$$\frac{P_{q-1}}{\cot \varepsilon_{q-1} - \cot \varepsilon_q} = \frac{P_q}{\cot \varepsilon_q - \cot \varepsilon'_{q+1}}$$

Dando a q tutti i valori interi da $q = 2$ a $q = n-1$ si hanno le $2n-2$ eq^ni formanti un eq^ne continua..

$$\frac{P_1}{\cot \varepsilon_1 - \cot \varepsilon_2} = \frac{P_2}{\cot \varepsilon_2 - \cot \varepsilon_3} = \frac{P_3}{\cot \varepsilon_3 - \cot \varepsilon_4} = \dots = \frac{P_{n-1}}{\cot \varepsilon'_{n-1} - \cot \varepsilon_n}$$

A cui osservando che $\cot \varepsilon_r = -\cot \eta_{r-1}$ si dà la forma semplice.

$$\frac{P_1}{\cot\varepsilon_1+\cot\eta_1} = \frac{P_2}{\cot\varepsilon_2+\cot\eta_2} = \frac{P_3}{\cot\varepsilon_3+\cot\eta_3} = \dots\dots = \frac{P_{n-1}}{\cot\varepsilon_{n-1}+\cot\eta_{n-1}} \qquad (II)$$

Le (I) e le (II) eq. avendo riguardo alle relazioni $\eta_{n-1}+\varepsilon_n = 180°$ dei rimanenti $n-2$ danno le condizioni cercate di equilibrio.

Se il poligono ha fissi i suoi termini prendendo per origine il punto A_1 e per asse x un orizzontale per esso condotta siccome gli angoli dei lati compresi agli assi sono complementari degli angoli dei medesimi colla verticale sarà

$\Sigma l \operatorname{sen}\varepsilon = a \quad \Sigma l\cos\varepsilon = b$ purchè si estenda la somma a tutti i lati e si ponga che $\varepsilon_n = \eta_{n-1}$. Prendendo poi gli assi nel medesimo modo, e denominando $x_s\ y_s$ le coordinate del punto d'applicazione del peso P_s; $x_{s-1}\ y_{s-1}$ quelle del punto d'applicazione della forza P_{s-1} il lato l_s compreso tra i medesimi sarà ordinato all'asse x dell'angolo la cui tangente sarà $\frac{y_s - y_{s-1}}{x_s - x_{s-1}}$, dunque la cotangente dell'angolo che lo stesso lato fa con la verticale e che denominammo ε_s avrà la medesima espressione; quindi $\cot\varepsilon_1 = \frac{y_1}{x_1}$ $\cot\varepsilon_2 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$; $\cot\varepsilon_3 = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$ . . . . $\cot\varepsilon_n = \frac{b-y_{n-1}}{a-x_{n-1}}$ dove per y_n e x_n coordinate di A_n sostituiremo le note b e a.

Nel poligono funicolare carico di pesi equilibrati l'ecata comune di giacitura dei pesi occupa la più bassa posizione possibile, se i lati sono flessibili: se sono rigidi ed aggroppati gli uni sugli altri l'ecata di giacitura è nella posizione più alta possibile. Quindi conformemente al teorema enunciato nella Lez XXXII il poligono è in equilibrio instabile nell'ultimo caso, stabile nel primo.

(Venturoli 188–189; Poisson 291–292)

LEZIONE XLIX.

Preliminari sulle curve funicolari – Definizioni delle forze sollecitanti – Loro componenti tangenziali – Caso in cui queste forze derivino da cause equivalenti attraenti – Il binomio $X dx + Y dy + Z dz$ è un differenziale esatto perchè il filo sia ortogonale e omogeneo.

CURVA funicolare è qualunque curva secondo la quale si dispone nello stato di equilibrio un filo perfettamente flessibile, sollecitato in tutti i suoi punti da date forze e ritenuto in ciascuno dei suoi termini da una forza tangenziale o da un punto fisso. Come vedesi essa non è altro che poligono funicolare di un infinito numero di lati costituito in equilibrio.

Le tensioni prodotte da una forza P applicata in un punto di un filo, sopra i lati contigui del filo, sono chiamando ε, η gli angoli che la forza fa coi due lati $T = \frac{P \operatorname{sen} \varepsilon}{\operatorname{sen}(\varepsilon+\eta)}$ $T' = \frac{P \operatorname{sen} \eta}{\operatorname{sen}(\varepsilon+\eta)}$ come ben si è veduto. Ora se si suppone che il poligono si converta in una curva continua, l'angolo $\varepsilon+\eta$ sarà il supplemento dell'angolo di contingenza della curva nel punto ove si applica la forza P. Il qual angolo se la curva è continua sarà infinitamente piccolo; perciò siccome generalmente ε ed η avranno valori finiti le tensioni T e T' saranno infinitamente grandi per ogni valore finito di P. È dunque necessario affinchè la curva sia continua, e le tensioni dei suoi elementi siano finite, le forze sollecitanti P siano infinitamente piccole. Quando P avrà un valore finito la curva avrà un angolo di contingenza finito nel suo punto di applicazione o un punto sollecitato.

Per farci un idea ben giusta di queste forze infinitamente piccole applicate

nei punti della curva, intendiamo particolarmente un punto della medesima di cui le coordinate siano x, y, z. Se in questo punto immaginiamo concentrata l'unità di massa (rappresentata, secondo la convenzione fatta nella Lez XV da g) e a quella unità immaginiamo applicata la forza P, avremo in esso ciò che si dice la forza riferita all'unità di massa, e le sue componenti saranno X, Y, Z. Se ora immaginiamo questa forza ripartita uniformemente su tutta la massa, considerando un elemento infinitamente breve del filo, o della curva di forma d'asse del filo, e diciamo dm la massa di questo elemento, invece di aver le forze X, Y, Z, per l'elemento dm, le forze sollecitanti saranno $X dm$, $Y dm$, $Z dm$. Se la ρ non varia da un punto all'altro della curva queste componenti saranno costanti; se no saranno generalmente funzioni delle coordinate. Sia ω la sezione normale del filo nel punto x, y, z, δ la sua densità nello stesso punto; la massa del filo per la lunghezza elementare ds sarà $ds\omega\delta = dm$: dove ω e δ potranno esser costanti se il filo sia cilindrico ed omogeneo: oppure variabili ed allora saranno funzioni di x, y, z, e meglio di s. Così che le componenti della forza sollecitante l'elemento del filo (che senza errore può intendersi applicata in un punto qualunque di questo elemento) saranno allora $X\omega\delta ds$. $Y\omega\delta ds$. $Z\omega\delta ds$. Ora se prendasi sul filo una lunghezza s eguale a 1, se il filo è cilindrico ed omogeneo la massa dell'unità di filo sarà $\omega\delta \times 1 = \omega\delta$. Allora $X\omega\delta$, $Y\omega\delta$, $Z\omega\delta$ rappresentano le componenti della forza sollecitante, estesa alla massa contenuta nell'unità di lunghezza del filo, e supposta concentrata nel punto x, y, z. Quando anche il filo non fosse cilindrico ed omogeneo, le 3 equazioni surriferite equivarebbero alle forze sollecitanti che agirebbero sulla massa di un filo lungo 1, di sezione e

e d'unità eguali a quelle del filo proposto nel punto x, y, z; la qual massa si supponesse concentrata nello stesso punto. Chiamiamo X, Y, Z, le componenti così concepite; le componenti delle forze sollecitanti l'elemento dm sarebbero allora $X ds$, $Y ds$, $Z ds$. Supponiamo per es. che un punto le cui coordinate sono a, b, c eserciti sull'elemento dm un attrazione che è una funzione $R = F(r)$ unicamente della distanza r dei due punti. Questa distanza r sarà $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$; ed i coseni di lei verso direzioni parallele agli assi saranno

$$\cos\alpha = \frac{x-a}{r} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{y-b}{r} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{z-c}{r}.$$

Onde le componenti della forza attrattiva R riferita all'unità di massa sarebbe $-R\frac{x-a}{r}$; $-R\frac{y-b}{r}$; $-R\frac{z-c}{r}$. Le attrazioni avranno il segno negativo poichè per fissar le idee supponemmo $x>a$, $y>b$, $z>c$: quindi al punto a, b, c tende a ravvicinare all ~~elemento~~ origine l'elemento x, y, z. Nel qual caso le componenti riferite all'unità di lunghezza del filo sarebbero

$$X = -R\omega^2\delta\frac{x-a}{r} \qquad Y = -R\omega^2\delta\frac{y-a}{r} \qquad Z = -R\omega^2\delta\frac{z-c}{r},$$ Basterebbe

mutare i segni delle componenti se le attrazioni degenerassero in repulsioni.

Se ci fossero più altri centri attraenti lo stesso elemento, avremo:

$$X = -\omega^2\delta\left\{\frac{x-a'}{r'}R' + \frac{x-a''}{r''}R'' + \frac{x-a'''}{r'''}R''' + \ldots\right\} = -\omega^2\delta\sum\frac{x-a}{r}R:$$

$$Y = -\omega^2\delta\left\{\frac{y-b'}{r'}R' + \frac{y-b''}{r''}R'' + \frac{y-b'''}{r'''}R'' + \ldots\right\} = -\omega^2\delta\sum\frac{y-b}{r}R:$$

$$Z = -\omega^2\delta\left\{\frac{z-c'}{r'}R' + \frac{z-c''}{r''}R'' + \frac{z-c'''}{r'''}R''' + \ldots\right\} = -\omega^2\delta\sum\frac{z-c}{r}R:$$

Dove a', b', c'; a'', b'', c'', ... designano le coordinate dei singoli ~~punti~~ centri attraenti, quindi r' r'' r''' ... le distanze loro dal punto x, y, z: $R'R''R'''$.. funzioni qualunque di r' r'' r''' ... rispettivamente. Nel caso in cui le attrazioni

fossero in ragione inversa del quadrato delle distanze, chiamando f_q l'attrazione del centro $a_q\ b_q\ c_q$ sulla massa 1 alla distanza 1, la sua attrazione sul centro x, y, z sarebbe $\frac{f_q}{r_q^2}$ nel qual caso si avrebbe.

$$X = -\omega^2\delta^2 \Sigma \frac{x-a}{r^3} f\ ;\quad Y = -\omega^2\delta^2 \Sigma \frac{y-b}{r^3} f;\quad Z = -\omega^2\delta^2 \Sigma \frac{z-c}{r^3} f.$$

Similmente se le attrazioni fossero proporzionali alle distanze, sarebbe.

$$X = -\omega^2\delta^2 \Sigma (x-a) f;\quad Y = -\omega^2\delta^2 \Sigma (y-b) f\ \cdot\ Z = -\omega^2\delta^2 \Sigma (z-c) f$$

È facile date le componenti X, Y, Z della forza risultante riferita all'unità di lunghezza, trovare la sua componente secondo la tangente alla curva. Difatti i coseni degli angoli che queste componenti $X\ Y\ Z$ fanno colla tangente alla curva sono manifestamente $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$ $\cos\beta = \frac{dy}{ds}$ $\cos\gamma = \frac{dz}{ds}$. Onde la componente tangenziale totale avrà per espressione.

$\frac{X dx + Y dy + Z dz}{ds}$ Dove $X\ Y\ Z$ saranno generalmente funzioni di x, y, z. Ora il numeratore può calcolarsi provenendo dalla differenziazione di una funzione di x, y, z, $F(x,y,z)$. È facile dimostrare che quel binomio è differenziale esatto ogni volta che X, Y, Z provengono dalle attrazioni di punti fissi. Difatti allora si ha dalla formole che precedono.

$$X dx + Y dy + Z dz = -\omega^2\delta^2 \left\{ \Sigma \frac{x-a}{r} R dx + \Sigma \frac{y-b}{r} R dy + \Sigma \frac{z-c}{r} R dz \right\}$$

Ove abbiamo portato dx, dy, dz, sotto i simboli Σ perchè riguardo a questi q, r, R essendo le sole quantità variabili tanto fa metterli dentro come fuori. Ora tal espressione si può ancora scrivere.

$$X dx + Y dy + Z dz = -\omega^2\delta^2 \left\{ \Sigma R \left(\frac{(x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz}{r} \right) \right\} \quad (n)$$

Or se si offerva che per qualunque centro attraente si ha

$$r_q^2 = (x-a_q)^2 + (y-b_q)^2 + (z-c_q)^2$$

se ne trarrà per differenziazione.

$$r_q dr_q = (x-a_q)dx + (y-b_q)dy + (z-c_q)dz.$$

Onde sostituendo tal espressione nella (n) si conclude.

$$Xdx + Ydy + Zdz = -\omega^2\delta^2 \Sigma R dr = -\omega^2\delta^2 \Sigma F(r)dr$$

(poiché $R' = F'(r')$ $R'' = F''(r'')$...

$$Xdx + Ydy + Zdz = -\omega^2\delta^2 \{ F'(r')dr' + F''(r'')dr'' + \cdots \}$$

Ora se ω^2 e δ siano costanti ciò che avviene quando il filo è cilindrico ed omogeneo, il 2° membro diventa differenziale esatto, poichè si possono sempre trovare funzioni $\Phi'(r')$, $\Phi''(r'')$ ... tali che differenziate danno $F'(r')dr'$ $F''(r'')dr''$ .... sia che si esprimano in serie con termini finiti. Sarà dunque sempre $Xdx+Ydy+Zdz = -\omega^2\delta^2 d(\Phi'(r') + \Phi''(r'') + \cdots)$

Sta adunque il teorema: che il trinomio $Xdx + Ydy + Zdz$ quando X, Y, Z provengono da attrazioni di centri fissi è sempre differenziale esatto, purchè il filo sia cilindrico ed omogeneo.

Nel caso in cui le attrazioni seguono la ragione inversa dei quadrati delle distanze si avrà $F'(r')dr' = \frac{f'}{r'^2}dr'$; e quindi $\Phi'(r') = -\frac{f'}{r'}$; similmente $\Phi''(r'') = -\frac{f''}{r''}$ .... Onde segue.

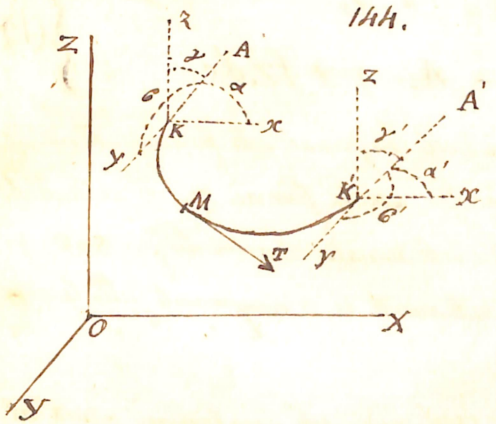
$$Xdx + Ydy + Zdz = \omega^2\delta^2 d\left\{ \frac{f'}{r'} + \frac{f''}{r''} + \frac{f'''}{r'''} + \cdots \right\}$$

Ciò nel caso in cui ω^2 e δ sia costante. Se ω^2 e δ sono funzioni di x, y, z il trinomio $Xdx + Ydy + Zdz$ non potrà più generalmente esser un differenziale esatto.

LEZIONE I.

Equazioni generali di una curva funicolare qualunque – Espressione della tensione in qualunque punto – Modo di determinare le costanti arbitrarie introdotte dalle integrazioni delle suddette equazioni – Curve funicolari a termini liberi e a termini fissi – Condizioni preliminari per l'integrabilità delle loro equazioni.

OGNI poligono funicolare in equilibrio essendo terminato o da 2 punti fissi o da 2 forze applicate nella direzione dei lati estremi, ancora qualunque curva funicolare sarà terminata da 2 forze A, A' applicate ad essa tangenzialmente, oppure da 2 punti fissi sostituendo le resistenze A A' per non venire richiesti delle forze rimanenti. Sia dunque KMK' una curva funicolare in equilibrio sotto l'influenza delle forze o delle resistenze A, A' applicate alle sue estremità, e di infinite forze infinitesime applicate a ciascuno dei suoi elementi. Sia M un punto di questa curva le cui coordinate sono x, y, z; e di cui X, Y, Z le forze sollecitanti del punto M secondo gli assi, e riferite all'unità di lunghezza del filo, supposta presa questa espressione nel senso che nella lezione precedente fu dichiarato. Le forze che sollecitano l'elemento di lunghezza ds, contiguo ad M saranno Xds, Yds, Zds. Lo stesso si potrà ripetere per qualunque altro elemento della curva; ma si suppone che X, Y, Z variino in



1ma.

un modo qualunque a passare da un punto all'altro.

Ciò premesso noi abbiamo veduto come la tensione T, in un lato qualunque di un poligono funicolare fosse eguale e direttamente contraria alla risultante di tutte le forze applicate al poligono a partire dal 1° punto fino al lato considerato. Questa proposizione seguendo a mente per il poligono di infiniti lati segue che la tensione T nel punto M della curva sarà eguale alla risultante della forza A e di tutte le forze applicate alla curva da K fino ad M. Pertanto decomponendo tutte queste forze secondo gli assi; detti α, β, γ, gli angoli della A cogli assi; X, Y, Z, le componenti riferite all'unità di lunghezza del filo della forza sollecitante in un punto qualunque, noi avremo osservando che le componenti della T secondo gli assi sono evidentemente $T\frac{dx}{ds}$, $T\frac{dy}{ds}$ $T\frac{dz}{ds}$ e avendo riguardo alla proprietà accennata

$$\left.\begin{aligned} -T\frac{dx}{ds} &= A\cos\alpha + \int X\,ds\,; \quad -T\frac{dy}{ds} = A\cos\beta + \int Y\,ds. \\ -T\frac{dz}{ds} &= A\cos\gamma + \int Z\,ds. \end{aligned}\right\} (1)$$

Dove i 3 integrali esprimono le somme delle componenti delle forze infinitesime sollecitanti gli elementi della curva a partire da K fino ad M. È evidente che la costante di questi integrali dovrà esser determinata in modo che per $s=0$, essi vadano tutti a zero, perchè allora evidentemente le 3 componenti della tensione si riducono alle 3 componenti di A.

Le 3 equazioni (1) dovranno verificarsi per qualunque punto del filo. Esse dovranno dunque anche sussistere pel punto K'; se l sia la lunghezza del filo KAIK', avremo allora evidentemente osservando che per tal punto le 3 componenti della tensione sono $A\cos\alpha'$, $A\cos\beta'$, $A\cos\gamma'$, se α', β', γ' siano

gli angoli della A' cogli assi

$$\left.\begin{aligned} \int_0^t X\,ds + A\cos\alpha + A'\cos\alpha' = 0 \qquad \int_0^t Y\,ds + A\cos\beta + A'\cos\beta' = 0. \\ \int_0^t Z\,ds + A\cos\gamma + A'\cos\gamma' = 0 \end{aligned}\right\} (II)$$

Queste 3 eq. non sono che un caso particolare delle (I), ma serviranno come si vedrà alla determinazione di certe costanti. Esse valgono di più ad esprimere per questo caso la 1ª general condizione di equilibrio dei poligoni funicolari, per cui tutte le forze sollecitanti trasportate in un punto parallelamente a loro stesse si fanno equilibro se il poligono è equilibrato.

Facendo membro a membro i quadrati di ciascuna delle (I) e sommando i risultati, osservando di più che $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, si ottiene

$$T^2 = (A\cos\alpha + \int X\,ds)^2 + (A\cos\beta + \int Y\,ds)^2 + (A\cos\gamma + \int Z\,ds)^2 \quad (III)$$

Tale è l'espressione della tensione per un punto qualunque della curva, x, y, z. Se poi tra le (I) si elimina ciò che caratterizza ciascun punto della curva nelle medesime, cioè T, otterremo 2 relazioni fra x, y, z che saranno evidentemente le 2 eq. differenziali della curva KMK'. Dividendo la 1ª delle (I) per la 2ª, poi la 1ª per la 3ª si ha per le eq. delle sue proiezioni sui piani xy e xz:

$$\left.\begin{aligned} dy\left\{\int X\,ds + A\cos\alpha\right\} - dx\left\{\int Y\,ds - A\cos\beta\right\} = 0 \\ dz\left\{\int X\,ds + A\cos\alpha\right\} - dx\left\{\int Z\,ds - A\cos\gamma\right\} = 0 \end{aligned}\right\} (IV)$$

Dalle quali quando è possibile la loro integrazione si ricavano le eq. finite fra le coordinate della curva. Dicemmo però la loro integrazione condurre a costanti arbitrarie osservammo per determinarle che per conoscere la posizione della curva nello spazio, bisogna conoscere le coordinate a, b, c di uno dei termini e precisamente

del primo A. Allora dopo l'integrazione le 2 eq. della curva dovranno esser soddisfatte, quando si ponga in luogo di x, y, z; a, b, c. Sostituendo queste costanti in luogo di x, y, z si avranno così 2 eq. fra quantità note e le costanti c c'; che con questo mezzo potranno facilmente determinarsi.

Nel caso in cui ambo i termini del poligono e curva funicolare siano liberi, essendo dati a, b, c si può cercare quale debbano esser nello stato di equilibrio le coordinate a', b', c' dell'altro estremo K'. Evidentemente queste coordinate dovranno soddisfare alle 2 eq. della curva, ponendole in luogo di x, y, z: di più è da osservare che la lunghezza KMK' del filo si suppone nota: se adunque consideriamo per es. la lunghezza di un arco qualunque KM come funzione dell'ascissa del punto M o di z sarà $ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ essendo $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ due funzioni di x che facilmente dalle (IV) si possono dedurre. Ora l'arco $l = KMK'$, si dovrà integrare tal espressione rispetto a x fra i limiti $x=a$ e $x=a'$ onde una condizione per determinare a' sarà

$$l = \int_a^{a'} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \quad \ldots \quad (V)$$

Questa aggiunta alle altre 2 sopraccennate darà la determinazione di a', b', c'. Nel caso di termini liberi essendo dati $A, A', \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ le eq. (II) dovranno verificarsi per identità.

Supponendo che sia fisso il 2° termine K le 3 componenti $A\cos\alpha$, $A\cos\beta$ $A\cos\gamma$ della resistenza del punto K saranno ignote, e determineranno dalle (III) che in questo caso non dovranno esser soddisfatte per identità dei valori di $A\cos\alpha$, $A\cos\beta$, $A\cos\gamma$ dalle medesime ricavati. Quanto alle a', b', c' esse si determineranno colle stesse eq. che servivano a determinarle nel caso precedente.

Se i 2 termini siano fissi le quantità a, b, c; a', b', c' sono evidentemente cognite, e saranno a determinarsi le 3 componenti di $A'A$; $A\cos\alpha'$, $A\cos\beta'$, $A\cos\gamma'$; $A\cos\alpha$, $A\cos\beta$, $A\cos\gamma$. Osservando che $\cos\alpha' = \frac{dx'}{ds'}$, $\cos\beta' = \frac{dy'}{ds'}$, $\cos\gamma' = \frac{dz'}{ds'}$; $\cos\alpha = \frac{dx_1}{ds_1}$, $\cos\beta = \frac{dy_1}{ds_1}$, $\cos\gamma = \frac{dz_1}{ds_1}$ ove $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$ designano ciò che diventano $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ quando ad x, y, z vi si sostituiscono a', b', c', e $\frac{dx_1}{ds_1}$, $\frac{dy_1}{ds_1}$, $\frac{dz_1}{ds_1}$ ciò che diventano gli stessi coefficienti quando a x, y, z vi si sostituiscono a, b, c; si vede che le 3 eq.ni di condizione si otterranno dalle (II) altre 2 dalle (IV); ed una sesta si avrà dalla (V): con che si avranno tutti gli elementi necessarii per la determinazione delle 6 incognite.

Ma perchè tutta questa analisi raggiunga il suo fine che è di determinare la forma e la tensione della corda funicolare è manifesto che bisogna aver fatti gli integrali $\int X ds$, $\int Y ds$, $\int Z ds$. Or se dian immediatamente X, Y, Z in funzione di s, questi 3 integrali in qualche modo si potranno pur sempre ridurre ad altre funzioni di s: e conseguentemente le (IV) presenteranno all'operatore le sole difficoltà inerenti all'integrazione delle eq.ni differenziali di data forma. Ma se X, Y, Z non siano dati direttamente in funzione di s, ma per es. in funzione di x, y, z, siccome noi non sappiamo quali relazioni esistano fra queste medesime variabili, perchè è appunto ciò che cerchiamo, noi non potremo esprimere le medesime in funzione di s, e quindi dare il mezzo di eseguire le integrazioni $\int X ds$, $\int Y ds$, $\int Z ds$. Quindi una condizione dell'integrabilità delle (IV) è dunque questa che X Y Z devono esser date in funzione di s.

Se per es. il filo non sia sollecitato da altre forze che dal proprio peso

prendendo l'asse z verticale sarà per qualunque punto $X=0$ $Y=0$ $Z=g\omega^2\delta$ dove g è il peso dell'unità di massa o la gravità, ω^2 e δ la ragione della densità del filo nel punto considerato. La condizione preliminare sarà soddisfatta quando ω^2 e δ siano dati in funzione di s. Nel caso in cui ω^2 e δ siano costanti il che avviene nel caso in cui il filo è omogeneo e omogeneo, si ha Z quantità costante e l'integrazione è assai facile; poichè $\int Z\delta ds = Z\int \delta ds = g\omega^2\delta s$. Invece quando le forze sollecitanti provengono da centri attraenti la cui attrazione sia funzione della distanza, evidentemente Z, X, Y, saranno funzioni della distanza oppure di x, y, z. In questo caso la condizione preliminare manca. Se il centro attraente fosse un corpo dotato di elettricità contraria a quella del filo, l'attrazione sarebbe ancora complicata dall'induzione elettrica variante colla figura del filo.

LEZIONE LI.

Modo di pervenire alla eq. di una curva funicolare qualunque quando X, Y, Z non sono dati in funzione di s ma solo di x, y, z. – Per un punto di una curva funicolare qualunque l'incremento della tensione su quella del punto precedente, è eguale alla componente tangenziale della forza al medesimo applicata: e la tensione è eguale alla componente normale della forza sollecitante riferita all'unità di filo e moltiplicata per il raggio di curvatura della curva.

Le equazioni (IV) non potendosi come ben si è compreso integrare ogni qual volta che X, Y, Z non siano dati in funzione di s, in caso che queste siano date in funzione di x, y, z coordinate della curva, converrà appigliarsi ad altro partito per ottenere le eq. A tal effetto si differenzieranno le (I) per togliere così i segni integrali. Incominciando a considerare una curva piana tutta contenuta nel piano xy, le 3 eq. (I) si ridurranno alle prime 2; e differenziandole come si è detto avremo.

$$-T = \frac{d^2x}{ds} - dT\frac{dx}{ds} = X\,ds \;:\; -T\frac{d^2y}{ds} - dT\frac{dy}{ds} = Y\,ds \;\; \text{(VI)}$$

In queste eq. noi potremo eliminare dT moltiplicando la 1ª per $\frac{dy}{ds}$ e la 2ª per $\frac{dx}{ds}$ e sottraendo la 1ª dalla 2ª; si ottiene così, risolvendo l'eq. risultata rispetto a T, finale

$$T = \frac{X\,dy - Y\,dx}{ds} \cdot \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \quad \text{(VII)}$$

Questa sarà l'espressione della tensione in un punto x, y, z della curva espressa per le coordinate del punto medesimo.

Noi potremmo ancora ha le (VI) eliminare T: moltiplicando però la 1ª di quelle per $\frac{dx}{ds}$ e la 2ª per $\frac{dy}{ds}$ e sommandole; osservando di più che

$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds}=\frac{1}{2}d\left\{\frac{dx^2+dy^2}{ds^2}\right\}=0$, perchè nel caso presente $dx^2+dy^2=ds^2$, otterremo $-dT=Xdx+Ydy$ . . . (VIII)

Differenziando ora ambi i membri della VII e paragonando il valore di dT così ottenuto con quello dato dalla (VIII) si troverà

$$Xdx+ydy=-d\left\{\frac{xdy-ydx}{ds}\cdot\frac{ds^3}{dxd^2y-dyd^2x}\right\} \quad (IX)$$

La quale serve a mostrare tante di T quanto di dT non esser più che una relazione fra x ed y (poichè $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ e X, Y sono funzioni di x,y) ed è l'eq. differenziale della curva funicolare contenuta nel piano xy.

Le eq. (VII) e (VIII) sono suscettibili di un enunciato geometrico: cosi proviamo di mostrarli geometricamente. Difatti se incominciamo a considerare la (VIII) noi vediamo che essa si può scrivere così.

$$-dT=X\frac{dx}{ds}ds+Y\frac{dy}{ds}ds.$$

Ora nel nostro caso evidentemente $X\frac{dx}{ds}ds$ è la componente di Xds secondo la tangente alla curva, e similmente $Y\frac{dy}{ds}ds$ è la componente di Yds secondo la tangente medesima: onde risulta che l'incremento dT della tensione, cioè la differenza fra la tensione dell'elemento ds che consideriamo e quella dell'elemento immediatamente precedente, è eguale alla componente tangenziale della forza che sollecita l'elemento ds. Il che del resto è evidente per sè stesso. Difatti consideriamo i punti $x'y'$, $x''y''$ immediatamente consecutivi alla curva funicolare. Nel punto $x'y'$ la tensione è eguale e direttamente contraria alla risultante di tutte le forze applicate dal 1° punto della curva fino ad $x'y'$: sia T' questa tensione. Nel punto $x''y''$ la tensione sarà eguale e direttamente contraria alla risultante di T'

e delle forze applicate all'elemento ds compreso tra $x'y'$ e $x''y''$ le quali forze sono $X'ds$ e $Y'ds$. Se a queste forze sostituiamo 2 altre forze equivalenti una tangenziale $X'dx+Y'dy$ e l'altra normale $X'dy+Y'dx$ la forza normale comporterà certuna tensione sul laterale ds: onde la tensione $-T''$ nel punto $x''y''$ sarà la risultante di $-T'$ e di $Xdx+Ydy$. Ma il laterale ds essendo infinitamente piccolo noi possiamo trasportare il punto di applicazione della $X'dx+Y'dy$ nel punto $x'y'$; siccome $-T'$ è tangente alla curva in $x'y'$, $X'dx+Y'dy$ è tangente alla curva in un punto qualunque dell'archetto ds, l'angolo delle $-T'$ e delle $X'dx+Y'dy$ sarà infinitamente piccolo, e la loro risultante sarà eguale alla loro somma. Onde la forza tendente l'elemento ds nel punto $x''y''$ sarà $-T''=-T'+X'dx+Y'dy$: onde si ricava $-(T''-T')=-dT=Xdx+Ydy$.

Il significato geometrico della (VII) non è mestieri a dedursi. Risulta evidentemente $\frac{Xdy+Ydx}{ds}$ ovvero $X\frac{dy}{ds}-Y\frac{dx}{ds}$ è la somma delle componenti secondo la normale delle forze X Y riferite all'unità di filo. Essa è dunque la forza normale applicata all'elemento e riferita all'unità di filo: ovvero la somma delle forze normali che animerebbero un filo di lunghezza 1 e di sezione e densità eguale a quella del filo nel punto considerato, supponendo che queste forze normali siano dappertutto eguali lungo l'unità di quel filo. Posasi $N=X\frac{dy}{ds}-Y\frac{dx}{ds}$ la forza normale riferita all'unità di filo: se si osservi di più che nella (VII) l'espressione $\frac{ds^3}{dxd^2y-dyd^2x}$ rappresenta il raggio ρ di curvatura della curva nel punto considerato qualunque sia del resto la variabile indipendente, si vedrà che essa si trasforma nell'espressione semplicissima $T=N\rho$. Cioè la tensione in un punto qualunque eguaglia la forza normale riferita all'unità di filo e moltiplicata pel raggio di curvatura: ovvero eguaglia la somma delle forze normali applicate a un filo

di lunghezza ρ eguale al raggio di curvatura, di tensioni eguali a quelle del filo considerato nel punto x, y, supponendo queste forze normali, applicate tutte eguali sulla lunghezza ρ; e eguali a $N ds$ sulla lunghezza ds.

Alla formola $T = N\rho$ si può pervenire considerando la curva funicolare come un poligono funicolare di infiniti lati. Infatti se siano AB, BC 2 lati consecutivi di un poligono funicolare in equilibrio, F una forza applicata in B e inclinata sui 2 lati angoli eguali, se φ sia l'angolo che formano fra loro i 2 lati AB, BC, gli angoli eguali ABL, LBC saranno ciascuno eguali a $\frac{1}{2}(180° - \varphi) = 90° - \frac{1}{2}\varphi$: sarà

quindi la tensione eguale per ambi i lati, come nelle leve superiori fu detto, e eguale a $F \frac{1}{2\cos(90° - \frac{1}{2}\varphi)} = \frac{F}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$.

Nel caso in cui AB, BC siano 2 lati infinitesimi consecutivi di una curva sarà detto $d\theta$ l'angolo di cui infinitesimo $T = \frac{F}{2\sin\frac{d\theta}{2}}$

Ora essendo $d\theta$ infinitamente piccolo sarà $2\sin\frac{d\theta}{2} = 2\frac{d\theta}{2} = d\theta$: sarà poi $F = N ds$: perchè la forza normale N biseca appunto l'angolo ABC: e perciò $T = N\frac{ds}{d\theta}$. Essendo poi noto dalla teoria degli archi che in un punto il raggio di curvatura ρ, l'elemento ds dell'arco e l'angolo $d\theta$ di contingenza vi ha la relazione $ds = \rho d\theta$. se ne trarrà $\frac{ds}{d\theta} = \rho$ e quindi come sopra

$$T = N\rho \quad \text{- - - - - - (X)}$$

Similmente detta t la forza tangenziale riferita all'unità di filo si avrà la (VIII) in

$$-dT = t ds \quad \text{- - - - - (XI)}$$

(Venturoli 155, 170; Poisson 298.)

LEZIONE LII.

Integrazione delle eq.ni della Lez.a precedente e determinazione delle costanti arbitrarie — Loro estensione alle 3 dimensioni — Filarea e Lentoaria — In ogni suo elemento la tensione è costante e la forza normale è inversamente proporzionale al raggio di curvatura — Sua costruzione date le forze normali, e calcolo delle forze Normali date la figura della curva.

CONTINUANDO a fare la ipotesi che X, Y, Z siano funzioni di x, y, z pel caso della curva piana noi scorgemmo tantosto che l'eq.ne (VIII) ci dà l'espressione finita della tensione ogni volta che $X dx + Y dy$ è differenziale esatto: ciò che sempre avviene quando il filo spendo è omogeneo, le forze sollecitanti provengano da centri attraenti: come ben nella XLIX.a lez.a si è fatto vedere. E questa espressione della tensione si otterrà in funzione delle coordinate x e y: Laonde sostituendo tal espressione nella (VII) si avrà la curva data da un eq.ne differenziale dell'ordine terzo. La costante arbitraria introdotta dall'integrazione dell'espressione $ds^2 : d\tau$ si determinerà colla condizione che per $x = a$ $y = b$; che sono le coordinate del 1.° punto della curva si abbia $\tau = -A$, ritenute le solite denominazioni. E delle 2 costanti arbitrarie introdotte dalla doppia integrazione dell'eq.ne differenziale di secondo ordine l'una si determinerà dalla condizione che fatto in esa $x = a$ riesca $y = b$: l'altra osservando che pel 1.° punto della curva deve avere $\frac{dy}{dx} = \tang \alpha$, se α sia l'angolo che la forza A tangenziale fa coll'asse x. Nel resto nel caso di uno o due termini fissi le indeterminate si calcolano trattando le eq.ni nello stesso modo che si è fatto nel caso della Lez.a L.

Nello stesso modo che si sono ottenute le eq.ni della curva piana nel caso in cui X, Y, fossero date in funzione di x, y potremo rinvenire le eq.ni della curva

qualunque funicolare porta nello spazio quando si abbiano $X\,Y\,Z$ in funzione di x, y, z. Differenziando difatti le 3 eq. (1) ne otteniamo

$$\left.\begin{aligned} -T\,d\frac{dx}{ds} - dT\frac{dx}{ds} &= X\,ds\,; \quad -T\,d\frac{dy}{ds} - dT\frac{dy}{ds} = Y\,ds \\ -T\,d\frac{dz}{ds} - dT\frac{dz}{ds} &= Z\,ds \end{aligned}\right\} \quad (XII)$$

Eliminando dT prima fra le 2 prime per fra la prima e la terza si ha.

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{X\,dy - Y\,dx}{ds}\cdot\frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \\ T &= \frac{Z\,dx - X\,dz}{ds}\;\frac{ds^3}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} \end{aligned}\right\} \ldots (XIII)$$

Similmente moltiplicando la prima delle (XII) per $\frac{dx}{ds}$ la seconda per $\frac{dy}{ds}$, la terza per $\frac{dz}{ds}$, e osservando di più che $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ che

$$\frac{dx}{ds}d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d.\frac{dz}{ds} = \frac{1}{2}d\left\{\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2}\right\} = \frac{1}{2}d.1 = 0$$

si troverà facendo la somma delle 3 eq. così preparate.

$$-dT = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz. \quad \ldots\ldots (XIV)$$

La significazione geometrica di questo risultato è la stessa che quella del risultato analogo ottenuto nella Lez precedente per la curva piana, ogni volta che $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ è un differenziale esatto come nel caso di un solido cilindrico o omogeneo attratto da più centri, si potrà eseguire l'integrazione e ricavare T per x ed y; sostituendo il suo valore nelle (XIII) si avranno le 2 eq. differenziali della curva funicolare. La costante arbitraria introdotta dall'integrazione della (XIV) si determinerà colla condizione che per $x = a$, $y = b$, $z = c$ deve aversi $T = -A$. Quanto alle 4 costanti arbitrarie introdotte dall'integrazione delle 2 eq. della curva, esse si determineranno

osservando che esse devono esser soddisfatte da $x=a$, $y=b$, $z=c$ (così già si hanno 2 condizioni); e che ponendovi in luogo di x, y, z, a, b, c. dee risultare $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{ds} = \cos\beta$ se α e β siano gli angoli della forza A cogli assi x e y.

Le (XIII) eq. si potrebbero per mezzo di combinazioni analitiche ridurre alla condizione $T = N\rho$, se ρ sia il raggio di curvatura misurato nel piano osculatore. Ma se si osservi che la dimostrazione geometrica data per una curva piana della formola $T = N\rho$ si fonda sopra 2 lati consecutivi di un poligono qualunque funicolare, è evidente che sussisterà ancora quando anche il poligono funicolare infinitilatero sia sghembo, e la curva funicolare non possa tutta contenersi in un piano. Quindi otterremo eziandio come dimostrata per una curva a doppia curvatura la $T = N\rho$

Applichiamo le precedenti generali teorie alla ricerca delle curve funicolari sollecitate da forze normali ripetutamente presso applicate nei loro successivi punti, crescenti secondo legge data. Di tali curve in natura si hanno esempi non rari. Così es. quando una vela rettangolare attaccata pel lato superiore ad una verga e per l'inferiore a un altra alla prima parallela, è gonfiata dal vento, essa soffrirà da questo una pressione che si decomporrà in tante pressioni parziali esercitate normalmente ai singoli elementi della superficie della vela. E siccome la vela assumerà allora la figura di una superficie cilindrica le cui generatrici sono parallele alle 2 verghe cui essa è attaccata, la direttrice di tal superficie cilindrica sarà una curva di questo genere. Onde le venne il nome di Lintearia, o Silacea (da Linteum lenzuolo). Similmente se un canale orizzontale e rettilineo di cui le 2 pareti laterali sono piane e verticali, e terminate superiormente da 2 orizzontali, ed il fondo ~~curvo~~ piano è applicato a un lenzuolo o velo, questo assumerà quando il

canale sia ricoperto d'acqua una forma cilindrica consimile a quella della vela, e la direttrice di tal cilindro sarà pure una catenaria.

Sia dunque a considerarsi una curva di tal genere; siccome tutte le forze ad essa applicate sono alla medesima normali, le forze tangenziali saranno nulle: e quindi avremo

$$X dx + Y dy + Z dz = - d T = 0 \qquad T = \text{costante}$$

E siccome bisogna determinare questa costante in modo che per $x=a$ $y=b$ $z=c$ si abbia $T=-A$ noi avremo pel corso di tutta la curva

$$T = - A$$

Ove si consideri il solo valore assoluto della tensione sarà $T = A$. Questa proprietà si può dimostrare ancora per mezzo dei poligoni funicolari. Infatti è facile vedere che in un poligono funicolare in cui tutte le forze sollecitanti siano normali al poligono, cioè a dire dividano per mezzo tutti i suoi angoli, la tensione è costante. Or una catenaria è appunto un poligono funicolare di cui gli angoli infinitamente vicini ad un retto sono bisecati dalle infinite forze sollecitanti.

Introducendo nella eq.ne $T = NP$ la condizione $T = A$ noi otteniamo $A = NP$, ovvero $P = \frac{A}{N}$ o $N = \frac{A}{P}$ ciò che significa che in qualunque punto della catenaria il raggio di curvatura è inversamente proporzionale alla forza normale riferita all'unità di lunghezza del filo. Cioè si vede immediatamente come date le forze normali per ciascun punto si possa trarre della natura della curva corrispondente di infiniti o almeno di molti archetti di circolo aventi per espressione la tensione uniforme sofferta dalla catenaria, diviso per la forza normale riferita all'unità di filo, che a quel punto corrisponde. Viceversa data una curva qualunque se ne possono sempre applicare nei singoli punti tali forze nor-

mali che stia in equilibrio sotto l'azione di 2 forze tangenziali A applicate alleree estremità ed eguali alle tensioni che si vuole che la curva sopporti. Supponiamo per es. che si domandi il valore della forza normale applicata ad un decimillesimo di lunghezza di una curva per cui in quel tratto il raggio di curvatura è di r metri, e la tensione è di p chilogrammi. Noi avremo per la forza normale riferita all'unità di filo (e per unità prenderemo il metro) $N = p^{\text{chil.}} \cdot \frac{1}{r}$. Quindi di tal forza la porzione che dovrà applicarsi al decimillesimo o 10,000^{mi} parti di metro, sarà eguale $Nds = p^{\text{chil.}} \frac{1}{r} \times 0{,}0001 = \frac{p^k}{10000\,r}$. Ed in generale se in vece di prendere per elemento un decimillesimo si prendesse $\frac{1^m}{H}$ si avrebbe per la forza sollecitante $Nds = \frac{p^k}{Hr}$.

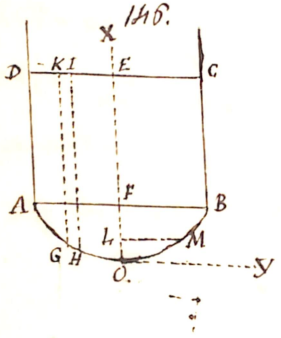
La costruzione pel caso dei termini liberi non offre difficoltà: ma quando i termini primi fissi; A sarà indeterminato: in questo caso si ricorre alla immediata integrazione dell'eq. differenziale $\frac{A}{N} = \frac{ds^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \rho$ in cui N sarà generalmente funzione di s, ed A una costante a determinarsi dalla condizione che le coordinate dei 2 termini debbono soddisfare alla eq. della curva e che $l = \int_u^a dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$.

LEZIONE LIII.

Equazione della catenaria direttrice del cilindro secondo cui si conforma il fondo flessibile di un canale cilindrico pieno d'acqua o altro liquido; determinazione delle costanti arbitrarie. Equilibrio di un filo teso alle estremità da 2 forze eguali e premente una superficie curva – La curva secondo cui il filo si dispone è la minima distanza fra i suoi estremi contando la distanza sulla superficie; oppure è la massima.

SIA un canale orizzontale di lunghezza = 1 formato da 2 sponde piane verticali AD, BC, fra loro parallele e di un fondo flessibile AOB inchiodato coi suoi lembi paralleli lungo gli spigoli inferiori delle 2 sponde che pure sono fra loro paralleli. Ov'si versi un volume V di liquido di peso specifico G. Il fondo

146.



prenderà la figura di un segmento di superficie cilindrica la cui sezione trasversale AOB sarà una catenaria: infatti ogni elemento superficiale compreso fra 2 generatrici infinitamente vicine di cui perciò la lunghezza sarà 1, e la larghezza GH = ds sarà premuto dal liquido normalmente all'elemento medesimo e con forza eguale al peso di un prisma fluido avente per base l'elemento premuto di area ds e per altezza la profondità KG o HI del medesimo sotto il livello dell'acqua DC, o del liquido equilibrato nel canale.

Se dunque DAOBC sia una sezione retta fatta nel canale, la catenaria AOB di cui si dimanda l'eq. sarà simmetrica rispetto alla retta Li ma OX parallela alle AD, BC, e da amb egualmente distante. Il vertice O della catenaria sarà dunque il più basso della medesima e sarà bene prenderlo per origine delle coordinate;

contando le ascisse x sulla retta OX, e le ordinate sulla OY ad essa ortogonale; faccia si eguale a $2a$ la larghezza $DC = AB$ del canale, ed chiamisi la larghezza nota del fondo flessibile, che non è altro che la lunghezza della filaria AOB: dicasi b la saetta incognita FO della curva; $EF = h$ sia l'altezza dell'acqua o del liquido nel canale sopra il livello AB, altezza che è pure ignota.

Dietro la definizione ora data della pressione del liquido sopra ogni elemento noi avremo per l'elemento ds contiguo ad M l'espressione di questa pressione normale $\frac{ds}{dy} N = ds \{ EF * FO - 1.0 \} = ds \times EL = ds \{ b + h - x \}$ Ma il carattere delle filarie essendo espresso da $N = \frac{A}{P}$, o $A = NP$ (dove A è la tensione costante per ogni dove) noi avremo prendendo x variabile indipendente.

$$A = dg \left\{ b + h - x \right\} \frac{ds^3}{dx d^2y} = dg (b + h - x) \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y}.$$

Tale è l'eq. differenziale di 2° ordine la cui integrazione, se fosse possibile darebbe l'eq in termini finiti della curva. In questo caso eseguita l'integrazione si avrebbero 2 costanti arbitrarie, che aggiunte alle 3 incognite A, b, h darebbero 5 indeterminate. Queste si conoscerebbero col mezzo di 5 eq. delle quali la 1ª è data dalla condizione che per $x = 0$ $y = 0$, la 2ª dalla condizione che $x = 0$ dee dare $\frac{dy}{dx} = 0$; la 3ª dalla condizione che $x = b$ dee dare $y = a$; la 4ª dalla condizione che per $x = b$ dee aversi $\int_0^b dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = OMB = l$; finalmente la 5ª dalla condizione che V dee esprimere il volume totale del liquido. Ora questo volume è eguale a l moltiplicato per l'area $DAOBCD$ della sezione del canale; Onde si ha numericamente $V = 2ah + 2\int_0^b y\, dx$, dei tali è espresso l'espressione dell'area della sezione. Così le 5 indeterminate possono conoscersi mercè 5 eq.; e il problema è risoluto.

Consideriamo ora la curva d'equilibrio di un filo flessibile tirato nei suoi

2 capi da 2 forze eguali e direttamente opposte e applicato sopra una superficie resistente convessa ed esente da attrito. È manifesto che questa curva sarà ancora una filaria, quando il filo non è sollecitato da verun altra forza che dalle reazioni della superficie premuta: poichè queste si eserciteranno sempre normalmente alla superficie; epperciò normalmente al filo. Questa reazione in ciascun punto dovendo equilibrare alla risultante delle tensioni dei 2 lati-coli adjacenti alla curva dee esser eguale e contraria a questa risultante. Ora questa è contenuta nel piano dei 2 laticoli consecutivi della filaria, ossia nel piano osculatore di essa. Dunque la normale alla superficie nel punto considerato è contenuta in questo piano osculatore: E dunque carattere generale delle filarie di questa specie l'aver ordinatamente il loro piano osculatore Normale alle superficie su cui giacciono, qualunque sia il punto considerato.

Ora si dimostra che fra 2 punti di una superficie la linea più breve che dalla superficie medesima si possa condurre è quella che ha costantemente suo piano osculatore Normale alla superficie. Dunque la curva d'equilibrio di un filo sollecitato da forze eguali e contrarie nelle sue estremità sopra una superficie è la linea più breve che sulla superficie fra quei 2 punti si possa tirare. L'equilibrio del filo è allora stabile. Quando però la superficie è chiusa, allora alla proprietà sovraccennata potrà ancora soddisfare un altra linea che sarà la massima fra le minime che fra quei 2 punti si possono tirare; allora l'equilibrio sarà instabile. Per certe superficie avranno più posizioni di equilibrio stabile e più di instabile. Per es. è noto che la curva più breve che unisce fra loro 2 punti posti sulla superficie di un cilindro è un Elica: e siccome fra 2 punti possono condursi infinite Eliche di passo differente, così avremo le linee minime, ed infinite le posizioni di equilibrio stabile. Lo stesso però dicasi riguardo al cono:

quanto alle altre superficie sviluppabili la stessa deduzione si può estendere, osservando però che generalmente non ci avrà che una curva minima in queste superficie, perchè sono indefinite generalmente in tutti i sensi.

Anche in questo genere di filarie avrà luogo la proporzione espressa dall'eq- $T = Np$, onde $N = \frac{T}{\rho}$. Essendo data la tensione uniforme è facile dedurre la pressione esercitata da una porzione ds del filo (di lunghezza sufficientemente piccola, perchè si possa considerare come uniforme) sulla superficie. Questa determinazione numerica si fa come abbiamo accennato nel fine della Lez precedente. Solo qui osserveremo che se la superficie ha in un qualche punto per cui passa la filarie uno spigolo di regresso, essendo allora ρ infinitamente piccolo, sarà N grandissimo; epperciò cinta la resistenza del filo in quel punto esso si richiederà indubitatamente: mentre N sarà eguale a zero per i punti di inflessione della curva.

Se la superficie in alcuni punti è concava, la pressione diviene col raggio di curvatura diventa negativa, cioè tende a sollevare il filo staccandolo dalla superficie. Allora $\frac{T}{\rho}$ misurerà la pressione che deve esercitare sul filo perchè sia aderente in un dato punto alla superficie

Gli ultimi sono le applicazioni pratiche di questi principi. Così per es. si vede che la migliore disposizione delle pareti laterali d'una botte è la cilindrica o la conica a base circolare, perchè allora la pressione nelle cerchiature è distribuita uniformemente, essendo il raggio di curvatura del circolo una quantità costante. Similmente si comprende che nelle fasciature delle ferite la maggiore o minore pressione che sulle medesime vuolsi sia esercitata dipende dalla maggiore o minore curvatura della parte ferita. E le bardature dei cavalli debbono similmente disporre in modo che le pressioni sofferte dal loro corpo nel tiro dei veicoli si esercitino su quelle parti il meno sensibile che si può

(Venturoli 173 – 177 ; Poisson 301 – 302)

LEZIONE LIV.

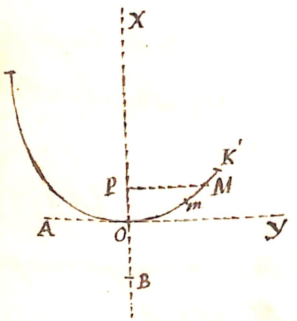
Delle catenarie – Loro proprietà – Equazione differenziale di tutte le catenarie – Data la figura di una catenaria, trovare la legge della distribuzione dei pesi lungo la medesima – Data la figura di un filo pesante abbandonato al suo peso trovare la legge con cui crescono le sue tensioni e le sue densità.

Come le polari sono le curve inviluppi dei poligoni a nodi scorrevoli, così le catenarie sono le curve inviluppi dei poligoni funicolari carichi di pesi. Dicesi catenaria la curva qualunque secondo cui si dispone un filo sollecitato in tutti i suoi punti da forze infinitamente piccole tra loro parallele.

Qualunque sia la legge con cui i pesi lungo il filo sono disposti, le proprietà competenti al poligono funicolare carico di pesi si avranno pure nelle catenarie. Quindi la catenaria sarà primieramente tutta contenuta nel piano delle forze sollecitanti, e per più comodità supponendo che queste siano pesi, sarà tutta contenuta in un piano verticale. Secondariamente ella sarà sempre concava all'insù se si tratta di un filo, o concava interamente all'ingiù se si tratta di una serie di laterali rigidi infinitamente piccoli semplicemente appoggiati gli uni contro gli altri. In terzo luogo la componente supportata in qualunque punto della tensione sarà sempre costante e eguale alla tensione nel punto infimo: la tensione assoluta in un punto qualunque sarà poi in ragione inversa del seno dell'angolo che fa colla verticale la tangente in quel punto. Quanto il centro di gravità dei pesi distribuiti sopra un arco qualunque della curva sarà sulla verticale che passa pel punto di concorso dei 2 laterali estremi della curva, o delle 2 tangenti estreme condotte a quell'arco. Quanto il centro di gravità dei pesi distribuiti lungo un arco qualunque occupa una posizione più bassa che se tutti i 2 estremi di quell'arco il filo prendesse qualunque

altra figura differente; in una parola è il più basso possibile. Capovolgendo la catenaria colla convessità all'ingiù e supponendola caricata colla medesima legge, ma formata di laterali infinitesimi semplicemente appoggiati gl'uni sugli altri, essa starebbe ancora in equilibrio, ma instabile.

Pongasi nel punto infimo o della curva l'origine delle coordinate, prendendo la tangente oy orizzontale per asse delle y, e la ox per asse delle x. Consideriamo un punto qualunque M della curva e chiamiamo Π la somma dei pesi applicati a partire da o fino in M. La somma delle forze verticali applicate lungo l'arco om sarà Π. Se di più immaginiamo tolta la parte ok del filo, e sostituiamo ad esso una forza oA eguale e contraria alla tensione orizzontale costante che chiameremo A, e che per il punto o eguale alla tensione assoluta, la parte om si rimarrà equalmente in equilibrio: Questa sarà l'unica forza orizzontale che sollecita l'arco om. Egli è perciò che nelle eq. generali sarà $\int X ds = -\Pi$, $\int y ds = -A$, quando gli estendiamo ancora alle componenti delle forze tangenziali che supponiamo applicate alle estremità della curva, che sono costanti che si possono comprendere nel simbolo integrale. Dalle quali 2 si ricava per differenziazione.



$$X = -\frac{d\Pi}{ds} \quad ; \quad y = 0 .$$

La 1ª delle eq. IV (Leç 1ª) che è l'eq. generale di una funicolare qualunque contenuta nel piano delle xy, si cangia dietro le fatte convenzioni di comprendere le costanti sotto i simboli integrali in

$$dx \cdot \int y ds - dy \int X ds = 0$$

E fatte le sostituzioni convenienti al nostro caso,

$$\pi\, dy = A\, dx \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

L'eq. (a) è l'eq. generale di tutte le catenarie e varia secondo il variare della funzione π. Onde già preveder la catenaria potrà apprendere qualunque figura di curva, purchè costantemente concava all'insù. L'espressione della tensione in una curva funicolare qualunque essendo data dalla formula generale (III) questa pel nostro caso diventerà, quando vi si ponga $\int y\,ds = -A$ $\int x\,ds = -\pi$ e si abbia inoltre riguardo alle fatte convenzioni.

$$T^2 = \left(\int x\,ds\right)^2 + \left(\int y\,ds\right)^2 + \left(T = \sqrt{A^2 + \pi^2}\right). \quad (b)$$

Per una curva funicolare piana qualunque, l'espressione di dT è data dalla (VIII) (Lez LI): in questa ponendo $X = -\frac{d\pi}{ds}$, $Y = 0$ si ottiene

$$dT = d\pi\, \frac{dx}{ds} \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

Similmente l'espressione della forza normale N riferita all'unità di lunghezza del filo per una funicolare piana qualunque essendo (Lez I.I) data dall'espressione $\frac{X\,dy - Y\,dx}{ds}$ sarà pel nostro caso particolare.

$$N = -\frac{d\pi}{ds}\,\frac{dy}{ds} \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

Finalmente il raggio di curvatura essendo dato dalla (X), avremo pel caso presente, sostituendo a N, T il loro valore ricavato dalle (b) (d)

$$\rho = -\frac{ds^2\sqrt{A^2 + \pi^2}}{d\pi\, dy} \quad \ldots\ldots \quad (e)$$

Ricavando dalla (a) il valore della tangente dell'angolo che fa la tangente alla curva coll'asse ox si trova. $\frac{dx}{dy} = \frac{A}{\pi}$

quantità che è sempre positiva. La curva volge dunque costantemente la sua concavità all'asse x e la sua convessità all'asse y: ciò che del resto è già noto.

Del resto si scorge dalla eq. (c) che dx costantemente ρ col segno −. Differenziando $dy = \frac{A}{\pi} dx$. Sostituendolo nella (c) si trova.

$$\rho = -\frac{\pi}{A}\left(\frac{ds}{dx}\right)\sqrt{A^2+\pi^2}\cdot\frac{ds}{d\pi}.$$

Quantità sempre negativa. Il raggio di curvatura è sempre dunque dalla stessa parte dell'arco OK, cioè diretto verso l'asse x.

Chiamando poi α l'angolo che fa la tangente alla curva colla verticale o coll'asse x otterremo dalla (a) $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\alpha = \frac{A}{\pi} = f'(x)$.

secondo la notazione di Lagrangia; Se dunque si trattasse di cercare di qual infinitamente piccolo un filo pesante abbandonato a se stesso prenda la figura di una data curva, troveremo che per un punto M la somma π dei pesi distribuiti lungo l'arco OM fosse invariamente proporzionale alla tangente dell'angolo che fa nel punto M la toccante alla curva colla verticale. Se si volesse per es. trovare il peso da applicarsi sull'archetto piccolissimo Mm bastarebbe misurare la tangente degli angoli α ed α' che fanno le 2 toccanti la curva con OX: si avrebbe chiamando π il peso distribuito sull'arco OM, π' quello distribuito sull'arco Om

$$\pi = \frac{A}{\text{tang}\alpha} \qquad \pi' = \frac{A}{\text{tang}\alpha'} \qquad \pi - \pi' = d\pi = A(\cot\alpha - \cot\alpha')$$

Queste è uno dei 2 problemi generali che nelle catenarie, come nelle altre figure simili si possono proporre: 1° Data la figura di una curva costantemente concava all'asse trovare la legge con cui i pesi sono sulla medesima distribuiti, quando il filo che la forma abbandonato a se stesso prende quella figura: 2° Data la legge della distribuzione dei pesi trovare la figura della curva

Riguardo al 1° problema di cui una soluzione approssimativa avemo data or ora, si può osservare che la soluzione analitica completa si avrà differenziando la $\pi = \frac{dx}{dy} A$!

$$d\pi = A \frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{dy^3}.$$

Osservando poi che se $\rho = \frac{ds^3}{dy\,d^2x - dx\,d^2y}$ sia $dy\,d^2x - dx\,d^2y = \frac{ds^3}{\rho}$, avremo

$$d\pi = A \frac{ds^3}{dy^3} \frac{1}{\rho}, \quad \frac{d\pi}{ds} = \frac{A}{\rho} \cdot \frac{1}{\cos^3\theta}$$

Poichè se θ è l'angolo della tangente coll'asse y, $\cos\theta = \frac{dy}{ds}$ Ma dall'eq. $X = -\frac{d\pi}{ds}$ si viene alla trasformazione

$$X = -\frac{A}{\rho \cos^3\theta}.$$

Ove $-X$ è il peso riferito all'unità di lunghezza del filo. Per tal modo è facile una X per qualunque punto del filo, perchè data la tensione del punto inferiore l'eq. della curva è facile ottenere ρ e $\cos\theta$.

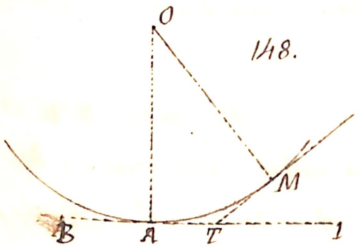
Che se vogliam considerare particolarmente il caso di un filo pesante e che si voglia avere la legge con cui debbono crescere le sue sezioni e la sua densità perchè si disponga secondo una data curva quando lo si abbandoni al proprio peso, osserveremo che chiamata δ la sua densità, e ω^2 la sua sezione in un punto qualunque sarà $g\omega^2\delta.ds$ il peso della lunghezza contigua ds del filo: sia $d\pi$. Sarà dunque $\frac{d\pi}{ds} = g\omega^2\delta$.

$$g\omega^2\delta = \frac{A}{\rho\cos^3\theta} \qquad (w)$$

Ove si vede che o l'uno o l'altro degli elementi ω^2 e δ può variare a piacimento. Se consideriamo un filo omogeneo, si avrà δ costante. La tensione A potrà determinarsi dalla condizione che in un dato punto il filo abbia una sezione data. Così per es. se vogliam che nel punto O ove $\cos\theta = 1$ si abbia per sezione Ω^2, la

condizione sarà $g\Omega^2\delta = \frac{A}{R}$ $A = g\delta R\Omega^2$. Se R sia il raggio di curvatura della data curva nel punto O. per tal modo la (w) diventa, tolti i fattori comuni $\omega^2 = \frac{R}{\rho}\frac{\Omega^2}{\cos^2\theta}$.

Vogliasi per es formare un filo omogeneo tale che appeso per le sue 2 estremità si conformi secondo un circolo di raggio R quando lo si abbandona al proprio peso. Allora si avrà costantemente $\rho = R$. Se si domandi la regione del filo nel punto M per cui $AM = S$, bastera osservare che $\cos\theta = \cos MTt = \cos AOA = \cos\frac{S}{R}$. Sarà quindi $\frac{R}{\rho} = 1$! e se sia Ω^2 la data regione nel punto A si otterrà pel punto M.



118.

$$\omega^2 = \frac{\Omega^2}{\cos^2\frac{S}{R}} = \Omega^2 \sec^2 AOM.$$

Se si volesse che il filo si disponesse secondo una retta orizzontale, si avrebbe $R = \infty$ $\rho = \infty = R$, perchè la curvatura è uniforme; quindi $\frac{R}{\rho} = 1$. $\theta = 0$ costantemente, $\omega^2 = \Omega^2$. E veramente un filo flessibile e omogeneo abbandonato a sè medesimo e non fisso in verun termine non tende a mutare la sua figura, e si dispone in linea retta se tal forma gli si vuol dare: ma se fosse fra termini fissi, se questi 2 non sono nella stessa orizzontale, e se la loro distanza non è eguale alla lunghezza del filo si cade in assurdità. Della condizione dei termini liberi o fissi sarà altrove discorso.

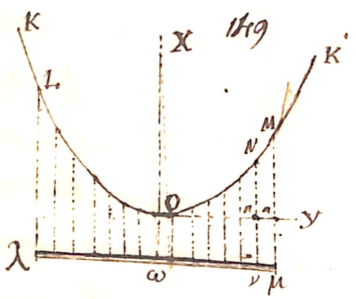
(Venturoli 178, 180; Poisson 293-294, 298)

LEZIONE LV.

Integrazione dell'eq. $\pi dy = A dx$ per varii casi particolari – Catenaria parabola o curva dei ponti sospesi – Catenaria omogenea, sua eq., sua lunghezza sua tensione, suo raggio di curvatura.

Il problema inverso di quello che nella Lez precedente si è risolto, cioè la determinazione della figura d'equilibrio del filo quando è dato il peso π in funzione delle coordinate o dell'arco considerate esplicitamente nell'integrazione dell'eq. differenziale $\pi dy = A dx$.

Fra per 1° caso si trovano la figura d'equilibrio di un filo o catena KOK' che sostiene per via di fili sospesi verticalmente una catena o fune flessibile $\lambda\mu$ disposta secondo una retta orizzontale. In questo caso ciascun elemento MN può ritenersi come gravato dalla porzione $\nu\mu$ di catena eguale in lunghezza alla sua proiezione orizzontale mn sull'asse y; e quindi il peso di cui è gravato l'arco $OM = s$ sarà eguale al peso della porzione $\omega\mu$ di catena. Se dunque la lunghezza di catena $= 1$ abbia per peso R sarà il peso della parte $\omega\mu$ eguale a $K \times \omega\mu = Ky$ e quindi $\pi = Ky$. L'eq. della curva sarà dunque



$$Ky\,dy = A\,dx \qquad 2Ky^2 = Ax + C.$$

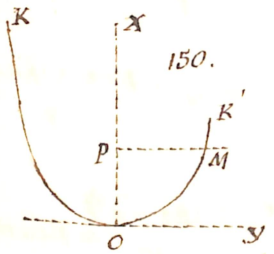
E siccome presa l'origine in O, $x = 0$ deve dare $y = 0$ sarà $C = 0$ e l'eq. si riduce a $2Ky^2 = Ax$ La catenaria in questo caso non è dunque altro che una parabola coll'asse verticale. Questo è precisamente il caso dei fili che reggono

i ponti sospesi, quando si neglige il peso dei medesimi, quello da tirante di sospensione

Quando la saetta è molto piccola, l'arco potendosi confondere sensibilmente colla sua corda, si può dire approssimativamente che π è proporzionale all'arco OM: e conseguentemente cade riduce in quello della catenaria secondo cui si dispone un filo uniformemente gravato su tutta la sua lunghezza, che è pure il caso di un filo pesante flessibile e omogeneo. La catenaria di cui ora è questione per questa sua proprietà dicesi appunto catenaria omogenea.

Se nella catenaria omogenea KOK' consideriamo un arco qualunque $OM=s$ avremo π eguale al peso di quell'arco: detto dunque K il peso dell'unità di lunghezza del filo sarà $KS=\pi$: onde segue l'eq. differenziale della catenaria omogenea $Ks\,dy = A\,dx$. Se poi si chiami B una lunghezza del filo tale che il suo peso eguagli la tensione A orizzontale sarà $A=BK$ evidentemente: onde $K=\frac{A}{B}$. Sostituendo in quell'eq. la lunghezza B essa diventa

$$s\,dy = B\,dx.$$



L'espressione della tensione per tutta la catenaria essendo data dall'eq. (b) (der. 'LIV)

essa diventerà posto $A=KB$ $\quad \pi = ks$

$$T = K\sqrt{B^2+s^2} \qquad \text{(}\beta\text{)}$$

Espressione della tensione molto facile a ricordarsi. Similmente fatto nella formola generale (c) le opportune sostituzioni, si troverà ricordando osservando che $d\pi = k\,ds$.

$$dT = K\,dx.$$

Integrando quest'eq. in modo che per $x=0$ $T=A$ si ha

$$T = Kx + A, \quad \text{o} \quad T = K(x+B) \qquad \text{(}\gamma\text{)}$$

Paragonando fra di loro i 2 valori di T dati dalle (β) e (γ) si ha

$B^2+S^2=(B+x)^2$, o $\quad S=\sqrt{2Bx+x^2}$ $\quad (\delta')$

equazione finita della catenaria fra l'arco OM e l'ascissa OB. È dunque la catenaria una curva rettificabile, essendo evidentemente fra x e $2B+x$ poichè $S=\sqrt{2Bx+x^2}=\sqrt{x(2B+x)}$. Introducendo quest'espressione di S nell'eq. differenziale (α) si ha l'eq. differenziale fra le coordinate rettangole x ed y

$$dy\sqrt{2Bx+x^2}=B\,dx.$$

nella quale si opera la separazione delle variabili dividendo per $\sqrt{2Bx+x^2}$; fatta questa operazione si integrino ambi i membri e si otterrà l'eq. finita in coordinate rettangole.

$$y=B\,Log\,nt.\ \frac{B+x+\sqrt{2Bx+x^2}}{B} \qquad (\varepsilon)$$

dove si è determinata la costante arbitraria in modo che per $x=0$ sia $y=0$. Il doppio segno dà per ogni valore di x 2 valori di y.

$$y'=B\,Log\,nt\,\frac{B+x+\sqrt{2Bx+x^2}}{B}\ ;\quad y''=B\,Log\,nt\,\frac{B+x-\sqrt{2Bx+x^2}}{B}$$

dei quali facendo la somma si ha

$$y'+y''=B\,Log\,nt\,\frac{(B+x+\sqrt{2Bx+x^2})(B+x-\sqrt{2Bx+x^2})}{B^2}=B\,Log\,nt.1=0$$

Ciò prova dunque che le 2 ordinate corrispondenti alla stessa ascissa sono eguali e di segno contrario: e che quindi la curva è simmetrica rispetto all'asse Ox.

Se si osserva che la (δ') di $B+x=\sqrt{B^2+S^2}$ e che $\sqrt{2Bx+x^2}=S$, tenendo del resto solo conto del segno positivo del radicale si avrà l'eq. finita fra le ordinate PM e gli archi OM:

$$y=B\,Log\,nt\,\frac{S+\sqrt{B^2+S^2}}{B} \qquad (\eta)$$

Volendo ottenere il raggio di curvatura, nella formola generale (ε) della Lez precedente si sostituirà a $\frac{ds}{d\pi}$ l'espressione $\frac{1}{K}$ ricavata da la $\pi=KS$ da

da cui per differenziazione si ricava $d\pi = K ds$. Similmente differenziando la (7) si ricaverà

$$dy = B\frac{ds + \frac{s\,ds}{\sqrt{B^2+s^2}}}{s+\sqrt{B^2+s^2}} = B ds \frac{\sqrt{B^2+s^2}+s}{(s+\sqrt{B^2+s^2})\sqrt{B^2+s^2}} = \frac{B ds}{\sqrt{B^2+s^2}}$$

Epperò $$\frac{ds}{dy} = \frac{\sqrt{B^2+s^2}}{B}$$

Di più $\sqrt{A^2+\pi^2} = K\sqrt{B^2+s^2}$: operando nella (e) tutte queste sostituzioni si avrà:

$$\rho = -\frac{1}{K}\cdot\frac{\sqrt{B^2+s^2}}{B}\cdot K\sqrt{B^2+s^2}, \qquad \rho = -\frac{B^2+s^2}{B} \quad \text{---} \quad (\theta)$$

Per avere l'espressione di ρ in funzione di x basta a cagione della (δ) sostituire a B^2+s^2 il quadrato $(B+x)^2$:

$$\rho = -\frac{(B+x)^2}{B} \quad \text{---} \quad (\zeta)$$

(Venturoli 181 182 183)

LEZIONE LVI.

Espressione della tensione, dell'arco, del raggio di curvatura e dell'ascissa della catenaria omogenea in funzione dell'ordinata – Determinazione della catenaria di massima tensione. Applicazione ai ponti sospesi – Limiti della lunghezza dei ponti sospesi da catene ed a corde di ferro.

Se nella eq. (E) della Lez. precedente cioè da la relazione fra le ordinate e le ascisse in funzione di queste ultime esplicitamente, si prendono per entrambi i membri i logaritmi, avremo.

$$Be^{\frac{y}{B}} = B + x + \sqrt{2Bx + x^2}.$$

e isolando il radicale, quadrando, e riducendo $B^2 e^{\frac{2y}{B}} = 2Be^{\frac{y}{B}}(B+x) + B^2 = 0$

onde $$B + x = \frac{B^2(1 + e^{\frac{2y}{B}})}{2Be^{\frac{y}{B}}} = \frac{B}{2}\left\{e^{\frac{y}{B}} + e^{-\frac{y}{B}}\right\} \quad \ldots (\omega)$$

e portando B nel 2° membro.

$$x = \frac{B}{2}\left\{e^{\frac{y}{B}} - 2 + e^{-\frac{y}{B}}\right\} = \frac{B}{2}\left\{e^{\frac{y}{2B}} + e^{-\frac{y}{2B}}\right\}^2 \quad \ldots (\eta)$$

Questa è l'espressione dell'ascisse x in funzione dell'ordinata y: da essa immediatamente scorgesi la curva dover esser simmetrica rispetto all'asse x poichè l'espressione di x non varia mutando y in $-y$ e viceversa. Per aver la tensione in funzione dell'ordinata basta osservare che $T = k(B+x)$: e prendendovi l'espressione (ω) di $B+x$ si avrà.

$$T = \frac{kB}{2}\left\{e^{\frac{y}{B}} + e^{-\frac{y}{B}}\right\} \quad \ldots\ldots (\chi)$$

Similmente nella ζ sostituendo a $(B+x)$ il suo valore dato dalla ω si ottiene

$$\rho = \frac{B}{h}\left\{e^{\frac{y}{B}} + e^{-\frac{y}{B}}\right\}^2 \quad \ldots\ldots (\lambda)$$

Finalmente ancora l'arco s potrà esprimersi per y prendendo dalla (η) i logaritmi

$Be^{\frac{y}{B}} = s + \sqrt{B^2+s^2}$ onde si trae $\frac{1}{B} e^{-\frac{y}{B}} = \frac{1}{s+\sqrt{B^2+s^2}} = \frac{s-\sqrt{B^2+s^2}}{-B^2}$ e

quindi $-Be^{-\frac{y}{B}} = s - \sqrt{B^2+s^2}$. Fatta la somma delle 2 espressioni di $Be^{\frac{y}{B}}$ e

$Be^{\frac{y}{B}}$ si ha $Be^{\frac{y}{B}} + Be^{-\frac{y}{B}} = 2s$ onde $s = \frac{B}{2}\left\{e^{\frac{y}{B}} - e^{-\frac{y}{B}}\right\}$ - - -(μ)

Volendo trovare l'ascissa del centro di gravità della catenaria partiremo dalle

formole generali $X = \frac{\int x\,ds}{s}$ $\qquad$ $Y = \frac{\int y\,ds}{s}$.

Ora $x = \sqrt{B^2+s^2} - B$! quindi $x\,ds = ds\sqrt{B^2+s^2} - B\,ds$. Ma differenziando

l'espressione ora scritta di x si trova $dx = \frac{s\,ds}{\sqrt{B^2+s^2}}$ onde nasce $ds = \frac{dx\sqrt{B^2+s^2}}{s}$

Sostituendo questo valore di ds nell'espressione di $x\,ds$ si ha.

$$x\,ds = \frac{B^2+s^2}{s}\,dx - B\,ds = \frac{B^2}{s}\,dx - B\,ds + s\,dx.$$

Ma dall'eq. differenziale della catenaria ommessa avendo $s\,dy = B\,dx$ se ne

cava $\frac{dx}{s} = \frac{dy}{B}$ quindi aggiungendo $x.ds$. da ambe le parti

$$2x\,ds = B\,dy - B\,ds + s\,dx + x\,ds.$$

Dopo questi artifizi si cuntegri osservando che $s\,dx + x\,ds = d.xs$!

$$2\int x\,ds = By - Bs + xs.$$

e risulta $\qquad X = \frac{By}{2s} + \frac{x-B}{2}$ - - - - - - - - - - - - (ν)

Per avere l'ordinata si differenzi la (μ).

$$ds = \frac{B}{2}\left\{\frac{dy}{B}e^{\frac{y}{B}} + \frac{dy}{B}e^{-\frac{y}{B}}\right\} = \frac{dy}{2}\left\{e^{\frac{y}{B}} + e^{-\frac{y}{B}}\right\}; \text{ onde}$$

$2y\,ds = y\,dy\,e^{\frac{y}{B}} + y\,dy\,e^{-\frac{y}{B}}$. Or posto $\frac{y}{B} = u$ sarà $y = Bu$ $dy = B\,du$:

poi si cuntegri per parti

$$\int y\,dy\,e^{\frac{y}{B}} = B^2\int u\,du\,e^u = B^2\left\{ue^u - \int e^u du\right\} = B^2\left\{ue^u - e^u\right\}.$$

posto similmente $-\frac{y}{B} = u'$ sarà $y = Bu'$ $dy = -Bdu'$:

$$\int y dy e^{-\frac{y}{B}} = B^2 \int u' du' e^{u'} = B^2 \left\{ u' e^{u'} - \int e^{u'} du' \right\} = B^2 \left\{ u' e^{u'} - e^{u'} \right\}$$

Quindi verrà.

$$2\int y ds = B^2 \left\{ u e^u + u' e^u - e^u - e' \right\} = By \left\{ e^{\frac{y}{B}} - e^{-\frac{y}{B}} \right\} - B^2 \left\{ e^{\frac{y}{B}} + e^{-\frac{y}{B}} \right\}$$

$$\int y ds = ys - B\frac{T}{K} + C \text{ e finalmente } Y = y - B\frac{T}{SK} + \frac{C'}{S}$$

Or siccome $T = K(B+x)$ è del resto e dee determinarsi in modo che per $y=0$ sia $\int y ds = 0$, avremo finalmente.

$$Y = y - B\frac{x}{S} \qquad (X)$$

Allorquando la corda fissa orizzontale nella medesima orizzontalità si sospende un filo pesante, se questo è quasi disposto in linea retta sia il peso, la tensione corrispondente agli estremi è grandissima. Difatti se nella eq.

$y = B \log \frac{B+x+\sqrt{2Bx+x^2}}{B}$ si fa $x=0$ e si vede che y abbia un valore finito ciò che si richiede perchè la catenaria si trasformi in una linea retta, bisognerà che B, lunghezza di una porzione del filo, il cui peso eguaglia la tensione sua sia infinita. Ciò avverrà se la saetta è grandissima, l'espressione $T = K(B+x)$ dà ancora agli estremi una tensione grandissima, e quasi proporzionale alla saetta; perchè per valori grandissimi di 2 saette x e x' si ha quasi esattamente $\frac{T}{T'} = \frac{K(x+B)}{K(x'+B)} = \frac{x+B}{x'+B'} = \frac{x}{x'}$. Onde è che fra queste 2 posizioni estreme ci sarà una certa catenaria omogenea pesante per quei 2 punti, e che darà ai 2 termini di sospensione una tensione minima. Sia sa la balla orizzontale e la distanza dei 2 punti: se si prende a per unità,

L'espressione della tensione data dalla (α) diverrà sostituendo 1 all'ordinata dei punti estremi, che altro non è che la mezza tratta.

$$T_1 = \frac{KB}{2}\left\{e^{\frac{1}{B}} + e^{-\frac{1}{B}}\right\}$$

Onde la tensione non sarà più funzione che di B. Per render minima la quantità T_1 bisognerà che $\frac{dT}{dB} = 0$. Differenziando dunque si ha

$$0 = \frac{2}{K}\frac{dT_1}{dB} = \left\{e^{\frac{1}{B}} + e^{-\frac{1}{B}}\right\} + \frac{1}{B}\left\{e^{-\frac{1}{B}} - e^{+\frac{1}{B}}\right\}$$

moltiplicando per B^2 $\quad e^{\frac{1}{B}}\left\{B-1\right\} + e^{-\frac{1}{B}}\left\{B+1\right\} = 0$

ovvero $$e^{\frac{2}{B}} = \frac{1+B}{1-B} \; ; \; \frac{2}{B} = Log\,nt\,\frac{1+B}{1-B} \quad , \quad 2 = B\,Log\,nt\,\frac{1+B}{1-B} \quad (\pi)$$

equazione trascendente la quale risolta per approssimazione da $B = 0,83352$

La catenaria omogenea più favorevole, cioè quella in cui i punti estremi sono meno tesi da B eguale alla mezza tratta moltiplicata pel numero 0,83552. Tale è la lunghezza della porzione di filo o di catena d'un peso eguaglia in questo caso la tensione orizzontale. Che se si voglia aver il valore di questa tensione minima ai punti di sospensione basta porre nell'espressione di T_1 tale valor di B, e si trova

$$T_1 = 1,508805 \cdot K.$$

Vale a dire la tensione in questione è eguale al peso di una parte di corda eguale alla mezza tratta (che assumeremo per unità) moltiplicato per 1,508805

Che se si domandi ancora la lunghezza della saetta della curva alla a produrre tale tensione, baderà nella (1) porre $x = 1$ e $B = 0,83352$ oppure ricavarla dalla $T = K(B+x)$ per avere

$$x = 1,508805 - 0,83352 = 0,67538.$$

La saetta è dunque eguale in questo caso alla mezza tratta moltiplicata

per λ^{20} 0,67538. Ne risulta sempre evidente l'impossibilità ottenere nei ponti di sospensione la tensione uniforme adottata per quel ponte: difatti bisognerebbe per ogni ponte di 100 metri di lunghezza adottare una saetta di 33m,709: la quale esigerebbe delle costruzioni troppo dispendiose per dare tale altezza ai ponti di ormeggio sul livello del tavolato.

Siccome i ponti sospesi sono costrutti con materie che al di là di un certo limite di tensione si rompono, così la loro lunghezza resta sempre dipendente dalla resistenza dei fili. Supponiamo dapprima, per fare il caso più favorevole, che il peso del tavolato e degli arpioni sia nullo, e che il peso del ponte si riduca così al peso del filo. Siccome la tensione nei ponti di ormeggio, porta il vantaggioso in cui la saetta sia 0,67538 della semi-trattta, è la massima che si abbia lungo tutto il filo, ed è eguale al peso di una porzione di filo eguale a 1,508 della semitratta; così al limite in cui il filo sta per rompersi nei ponti di ormeggio sarà detta Q la semitratta $2Q \times 1{,}508805$ eguale al modulo di tenacità (Lez XLIV). Detto M questo modulo avremo dunque per l'espressione della massima tratta possibile

$$2Q = \frac{2M}{1{,}508805} = M\,\frac{2}{1{,}508805} = M \times 1{,}325.$$

Dando ad M i valori della tavola che sta al fine della presente Lez si troverà che la massima tratta per cui si possa stendere una catena composta di spranghe di ferro è 74173 metri; e la massima tratta per cui si possa stendere una gomena di filo di ferro è 13250 metri. Ma se il rapporto della saetta alla semitratta si volesse far diverso da quello che qui abbiamo assunto cioè; 0,67538; i limiti rompendi si dovrebbero di assai restringere.

Ma in ogni ponte sospeso vi ha un tavolato sospeso da un gran numero di tiranti: cosicchè il peso delle gomene generalmente non è che una assai piccola

parte del peso totale che esse devono sopportare. Sia il peso del tavolato e dei ritenuti complessivamente eguale a m volte il peso delle gomene: il peso totale da esse sopportato sarà $m+1$ volte maggiore che nel caso precedente. Qui pure avvene la avvertenza della giornata cacciata essere una lunghezza della medesima $m+1$ volte minore, perchè la resistenza è sempre la stessa. La massima freccia cui possa arrivare un ponte in questa ipotesi, sopporta sempre la saetta nel caso più favorevole sarà dunque.

$$2q = \frac{M}{m+1} \frac{2}{1,508805} = M \frac{1,328}{m+1}.$$

Questo è il limite supremo, cioè che oltrepassando al ponte un peso simile esso si sconquasserebbe indubitatamente. Ma invece pei bisogni ordinarii è necessario che un ponte sia capace di sopportare un grande peso addizionale aggiuntovi dalle persone e dai carri che su vi passano, e possa senza difficoltarsi sopportare a delle scosse anche gravi. Per tutto ciò le leggi comandano che questi ponti e generalmente tutti gli altri edifizi, non debbano sopportare nel loro stato normale che la terza parte della tensione di rottura; e generalmente si adotta ed si talora la 8ª parte della tensione di rottura. Dirai n il denominatore di queste frazioni; la massima freccia possibile dietro tali condizioni si ridurrà a

$$2q = M \frac{1,325}{n(m+1)}.$$

Se dunque si suppone che il tavolato col suo massimo carico aggiunga a 10 volte il peso delle gomene, e si voglia per a adottare il più stretto termine permesso dalla legge, cioè 3, la più grande freccia che potrà avere un ponte sospeso a catena ben formate di spranghe di ferro sarà di 228 metri, e quella di un ponte sospeso a cavi, o a gomene di fili di ferro sarà di metri 100. E tutto ciò nell'ipotesi che la saetta eguagli a 0,67538 della semiluce

Or le condizioni particolari della costruzione di cui ora ci occupiamo non permettono mai una tale saetta. La massima saetta convenientemente eguaglia a $\frac{1}{5}$ della batt. onde i limiti sopradetti verranno grandemente diminuiti. E difatti posta la semibatta $= 1$, sarà $x = \frac{2}{5}$ e per la $T = K(B+x)$ avremo $T_1 = K\left(B+\frac{2}{5}\right)$ E siccome dunque avrà $T_1 = \frac{KB}{2}\left\{e^{B} + e^{-B}\right\}$ sarà

$$B + \frac{2}{5} = \frac{B}{2}\left\{e^{B} + e^{-B}\right\}.$$

Equazione trascendente che risolta per approssimazione dà $B = 2,336$: onde si ricava $T_1 = K, 2,736$. Sarà dunque la tensione nel punto di mezzo eguale al peso della lunghezza di fune eguale alla semibatta moltiplicato per 2,736. Allora attenute le ipotesi precedenti sarà

$$2q = \frac{2n}{2,736}\,\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{1,368\,n(n+1)}$$

Il limite della lunghezza per la saetta eguale a $\frac{1}{5}$ della batta. Il quale limite sarà per le catene 125 metri, e per le gomene 221 metri se $n = 10$ $n = 3$.

Avvertiremo finalmente che bisognerà che abbiano tutti i punti sospesi più estendersi alle volte formate a foggia di catenarie omogenee mutando le tensioni in proporzione e il modulo di elasticità nel modulo di compressibilità, se così vogliam chiamare la lunghezza della medesima colonna che può formarsi di una sostanza senza che le sue parti infine si frantumino.

LEZIONE LVII.

Costruzione della catenaria omogenea secondo condizioni date – Discussione completa dei 10 casi che si possono presentare quando i 2 punti di sospensione sono allo stesso livello. Determinazione della minima scelta che si deve fare della lunghezza data pel dato filo teso di una data catenaria.

Col mezzo delle eq. trovate nelle 2 lez. precedenti fra le quantità variabili x, y, s, T e la costante B si può risolvere qualunque problema che riguardi la costruzione della catenaria omogenea secondo date condizioni. Le principali di queste eq. si riassumono nei 3 seguenti sistemi:

$$\left.\begin{aligned} T &= K\sqrt{B^2+s^2} \\ y &= B\operatorname{Log}\frac{s+\sqrt{B^2+s^2}}{B} \\ x &= \sqrt{B^2+s^2}-B \end{aligned}\right\} (I) \qquad \left.\begin{aligned} T &= K(B+x) \\ y &= B\operatorname{Log}\frac{B+x+\sqrt{2Bx+x^2}}{B} \\ s &= \sqrt{2Bx+x^2} \end{aligned}\right\} (II)$$

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{KB}{2}\left(e^{\frac{y}{B}}+e^{-\frac{y}{B}}\right) \\ y &= \frac{B}{2}\left(e^{\frac{y}{B}}+e^{-\frac{y}{B}}\right)^2 \\ s &= \frac{B}{2}\left(e^{\frac{y}{B}}-e^{-\frac{y}{B}}\right) \end{aligned}\right\} (III)$$

Ciascun sistema regge da se e da esso possono dedursi gli altri due come vedemmo fatto in parte nelle 2 lez che precedono. Onde quando si tratta di costruire una catenaria omogenea secondo date condizioni, fra 3 quantità che dall'una all'altra possono variare cioè T, x, y, s B si hanno 5 eq.: Date dunque 2 di queste le altre 3 se ne devono poter dedurre.

Consideriamo primieramente le catenarie omogenee in cui i 2 punti di sospensione sono al medesimo livello, riferendosi ai punti estremi sarà s la semilunghezza dell'arco, x la freccia, y la mezza balza, T la tensione nel punto di mezzo che è la massima, B la lunghezza della parte di catena il cui peso eguaglia la tensione orizzontale. Date 2 di queste quantità le altre 3 se ne dedurranno per le formolette eq. Or siccome 3 quantità combinate 2 a 2 danno $\frac{3(3-1)}{2}$ = 10 combinazioni, si potranno distinguere nel problema propostoci i 10 seguenti

casi. Dati Trovare

1°. — B, x . . . y, S, T.

2°. — B, y . . . x, S, T.

3°. — B, S . . . y, x, T.

4°. — B, T . . . y, x, S.

5°. — x, T . . . y, B, S.

Dati Trovare

6°. — S, T, — — x, y, B.

7°. — S, x, — — y, B, T.

8°. — S, y, — — x, B, T.

9°. — x, y, — — S, B, T.

10°. — y, T — — B, x, S.

I° Caso. La questione può risolversi immediatamente colle 3 eq. del sistema (II) che danno S, S, T per mezzo dei dati B, x.

II° Caso. Si ricavano direttamente le 3 eq. del sistema (III) che danno x, S, T, in funzione di y, B.

III Caso. Le 3 eq. del sistema (I) esprimendo x, y T in funzione di B, S danno di questa la completa soluzione.

IV. Caso La 1ª eq. del sistema (I) da

$$S = \sqrt{\frac{T^2}{K^2} - B^2} \qquad (d')$$

La prima delle (II) da

$$x = \frac{T}{K} - B \qquad (d'')$$

Osservando poi che la seconda delle (II) dà y per x e B, basterà sostituire $B+x = \frac{T}{K}$ dato dalla (d'') e $\sqrt{2Bx+x^2}$ che per la 3ª delle (II) è eguale a S, sarà eguale a $\sqrt{\frac{T^2}{K^2} - B^2}$ per la (d') conclie sarà.

$$y = B\,Log\,\frac{\frac{T}{K} + \sqrt{\frac{T^2}{K^2} - B^2}}{B} = B\,Log\,\frac{T + \sqrt{T^2 - B^2K^2}}{KB} \qquad (d''')$$

Le 3 eq. (d') (d'') (d''') risolvono completamente il caso (IV)

V Caso. La 1ª delle II dà

$$B = \frac{T}{K} - x \qquad (e')$$

Sostituendo il valore di B nella 3ª delle (II) si ottiene

$$S = \sqrt{\frac{x}{K}(2T - Kx)} \qquad \text{(e'')}$$

Nella 2ª delle II sostituendo a B suo valore tratto dalle (e') e a $\sqrt{2Bx+x^2} = S$ il suo valore dato dalla (e'') si ha in 3° luogo.

$$y = \frac{T - Kx}{K} \operatorname{Log} \frac{T + \sqrt{Kx(2T-Kx)}}{T - Kx} \qquad \text{(e''')}$$

Questo V caso compiutamente è risoluto dalle (e') (e'') (e''').

VI CASO Colla 1ª eq. del sistema (I) si ha

$$B = \frac{1}{K}\sqrt{T^2 - K^2 S^2} \qquad \text{(f')}$$

Sostituendo questo valore di B nella (d'') si ottiene a

$$x = \frac{T - \sqrt{T^2 - K^2 S^2}}{K} \qquad \text{(f'')}$$

Sostituendolo nella (d''')

$$y = \frac{\sqrt{T^2 - K^2 S^2}}{2K} \operatorname{Log} \frac{T + KS}{T - KS} \qquad \text{(f''')}$$

Onde anco questo caso è pienamente esaurito. Nel caso in cui la saetta x sia molto piccola la tensione T è molto grande; in questo caso la (f'') può semplificarsi ponendo $\frac{T}{K}$ fatto comune e sviluppando il radicale:

$$x = \frac{T}{K}\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{K^2 S^2}{T^2}}\right\} = \frac{T}{K}\left\{1 - \left(1 - \frac{K^2 S^2}{2T^2} - \frac{1}{2.4}\cdot\frac{K^4 S^4}{T^4} - \cdots\right)\right\}$$

La frazione $\frac{KS}{T}$ essendo per ipotesi una frazione molto piccola potremo trascurare la sua 4ª potenza, onde l'espressione di x diventa

$$x = \frac{KS^2}{2T} \qquad \text{(f'')}$$

Questa è l'espressione della piccola freccia che ha nel mezzo una fune o catenella tesa con gran forza da ambi i lati. È manifesto che quanto più tesa la tenda tanto minore è la saetta x: ma siccome la tensione non può scemare al di là di un certo limite senza che il filo si rompa, si può domandare la minima

saetta che può fare nel mezzo una catena di data lunghezza e materia prima di rompersi. È evidente che a questo limite la tensione T eguaglierà il peso del modulo di tenacità della catena, il quale peso è evidentemente uguale MK se M sia il modulo di tenacità. Ponendo adunque $T = MK$ nella (f^{IV}) e osservando che se l è la lunghezza del filo si ha $l = 2S$, $S = \frac{l}{2}$; sarà la saetta massima.

$$x = \frac{KS^2}{2KM} = \frac{l^2}{4.2M} = \frac{l^2}{8M} \qquad (f^V)$$

Dal filo non potrà prendere saetta minore di questa senza lacerarsi: pei fili di ferro si ha $M = 10.000$: quindi

$$x = \frac{l^2}{80000} = l^2 \times 0{,}0000125.$$

Quindi una cordella di fil di ferro non può tendersi per modo che avendo p. e. 100 m di lunghezza, non faccia una saetta di almeno 125 millimetri. È osservabile che le saette stanno fra loro come i quadrati delle tratte: quindi per la tratta di 1 Chil. cioè 10 volte 100 m la saetta sarà $125^{mm} \times 100 = 12{,}5$

VII° Caso La 3ª del sistema (II) dà immediatamente

$$B = \frac{S^2 - x^2}{2x} \qquad (g')$$

Sostituendo questo valore di B nella 1ª delle (II) si trova

$$T = K\,\frac{S^2 + x^2}{2x} \qquad (g'')$$

Ora siccome $\frac{T}{K} = B + x$ sarà $B + x = \frac{S^2 + x^2}{2x}$: sostituendo questo valore di $B+x$ nella 2ª delle (II) ed a B il valore dato dalla (g^{IV}) e a $\sqrt{2Bx + x^2}$ surrogando S si troverà dopo ogni riduzione.

$$y = \frac{S^2 - x^2}{2x} \log \frac{S + x}{S - x} \qquad (g''')$$

Nel caso in cui sia x molto piccolo in confronto ad S potremo sviluppare il

Logaritmo, osservando che $Log \frac{s+x}{s-x} = Log \frac{1+\frac{x}{s}}{1-\frac{x}{s}}$; e si avrà

$$y = \frac{s^2-x^2}{2x} \cdot 2\left\{ \frac{x}{s} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{s}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{s}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{x}{s}\right)^7 + \dots \right\}$$

Trascurando per la fatta ipotesi i termini seguenti al cubo di $\frac{x}{s}$ avremo approssimativamente

$$y = \frac{s^2-x^2}{s} \qquad \dots \qquad (g^{IV})$$

Onde se si domandasse quale è la correzione da farsi in una misura di lunghezza in cui tenendo sospesa la catena di lunghezza $l = 2s$ fa si la saetta fare nel mezzo la saetta x si troverebbe chiamando ε questa correzione, e t la tratta reale $= 2y$. $\quad 2y = 2s - \frac{2x^2}{s}, \quad l - t = \varepsilon = \frac{4x^2}{l}$

La quale correzione dee farsi ogni portata. Per es. se misurando col decametro gli si fosse fatto prendere la saetta di 2 dm. avremo per ogni portata $\varepsilon = 16$ mm. E per un chilometro o 100 portate di decametro si dovrà sottrarre 16 mm $\times 100 =$ 1,6. Cosicchè se misuro per lunghezza di una linea un chilometro in questa misura secondo la correzione necessaria essa risulterà a $1000^m - 1,^m6 = 998,^m4$

VIII° Caso. In questo caso bisogna avere l'espressione approssimativa di B dall'eq. 5ª del sistema (III) la quale è trascendente. Svolgendo $e^{\frac{y}{B}}$ ed $e^{-\frac{y}{B}}$ in serie essa si riduce a

$$s = \frac{y}{B^2} + \frac{1}{1.2.3.}\frac{y^3}{B^4} + \frac{1}{1.2.3.4.5}\frac{y^5}{B^6} + \dots$$

Ogni volta che $\frac{y}{B} < 1$ si potrà con sufficiente approssimazione ottenere B facendo uso del metodo di NEWTON. Nel caso in cui la saetta sia molto piccola B si può avere per una formola assai semplice. Difatti risolvasi la (g^{IV}) rispetto ad x: avremo

$$x = \sqrt{s(s-y)} \qquad \dots \qquad (h')$$

E sostituito questo valore nella (g')

$$B = \frac{y\sqrt{s}}{2\sqrt{s-y}} \qquad (h'')$$

Ponendo per B il valore di B nella 1ª delle (I) si ha

$$T = K\frac{(y-2s)\sqrt{s}}{2\sqrt{s-y}} \qquad (h''')$$

IX° Caso. Quest'ipotesi dipende da eq. trascendenti; ma se la saetta sia molto piccola in confronto della tratta si ricaverà dalla (g^{IV})

$$s = \frac{y}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4x'}{y^2}}\right) \qquad (m')$$

e svolgendo $s = \frac{y}{2}\left\{1+1+\frac{2x^2}{y^2}+\frac{2x^4}{y^4}+\ldots\right\}$

e trascurando la 4ª potenza a cagione della piccolezza di $\frac{x}{y}$,

$$s = y + \frac{x^2}{y} \qquad (m'')$$

Il qual valore sostituito nella (g') dà trascurate x^4

$$B = \frac{y^2+x^2}{2x} \qquad (m''')$$

$$T = K(x+B) = K\,\frac{y^2+3x^2}{2x} \qquad (m^{IV})$$

X° Caso. Anche qui svolgendo rispetto a B la 1ª delle (III) si verrebbe ad esprimere B per T e y. Nel caso in cui la saetta sia molto piccola B sarà assai grande: quindi se si fa il quadrato della 3ª delle (III) si avrà.

$$s^2 = \frac{B^2}{h}\left\{e^{\frac{2y}{B}}+e^{-\frac{2y}{B}}-2\right\}$$

E svolgendo in serie i 2 esponenziali, riducendo e trascurando i termini in $\frac{y^6}{B^6}$

$$s^2 = y^2 + \frac{1}{3}\frac{y^4}{B^2}$$

Ma la 1ª delle I dà $B^2 = \frac{T^2}{K^2} - s^2$: però sarà.

$$B^2 = \frac{T^2}{K^2} - y^2 - \frac{1}{3}\frac{y^4}{B^2} \qquad (n')$$

$$KB = \sqrt{\frac{T^2+K^2y^2}{2} + \sqrt{\frac{T^4}{11} - \frac{T^2K^2y^2}{2} - \frac{y^4K^4}{12}}}$$

che si può agevolmente sviluppare in serie, e da cui si possono ritrarre agevolmente i corrispondenti valori di s e x.

Oppure osservando che il gran valore di B rende trascurabile l'ultimo termine della B^2 si avrebbe già un approssimazione scrivendo

$$B^2 = \frac{T^2}{K^2} - y^2 \quad \text{---------- } (n'')$$

Per avere un errore ancora minore si potrà sostituire il valore approssimativo (n^2) della B^2 nella (n'): si avrà così.

$$B^2 = \frac{T^2}{K^2} - y^2 - \frac{y^4}{3\frac{T^2}{K^2} - 3y^2}$$

$$\text{Ora } \frac{1}{3}\frac{y^4}{\frac{T^2}{K^2} - y^2} = \frac{1}{3}\frac{y^4\frac{K^2}{T^2}}{1 - y^2\frac{K^2}{T^2}} = \frac{1}{3}y^4\frac{K^2}{T^2}\left\{1 + y^2\frac{K^2}{T^2} + y^4\frac{K^4}{T^4} + \cdots\right\}$$

Fatti i prodotti e trascurati i termini in $\frac{K^4}{T^4}$ che sono piccolissimi, perchè essendo piccola la saetta, T è assai grande si avrà.

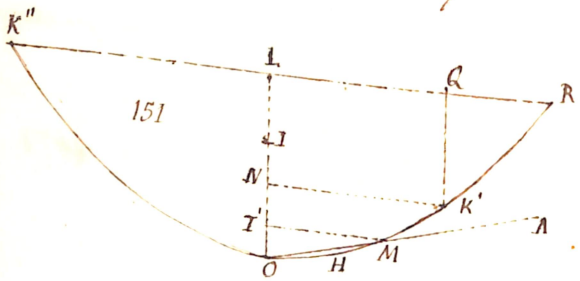
$$B^2 = \frac{T^2}{K^2} - y^2 - \frac{K^2}{3T^2}y^4. \quad \text{---------- } (n''')$$

Onde è facile aver s e x.

LEZIONE LVIII.

Modo di risolvere approssimativamente per una costruzione grafica i problemi della Lez precedente – Trasformazione di queste costruzioni in tavole – Uso delle tavole di DAVIES–GILBERT per la risoluzione dei suddetti problemi tanto quando i punti di omeggio sono alle stesse livello, quanto allorchè non lo sono.

QUANDO. la saetta non è molto piccola rispetto alla lunghezza i sudetti casi più non si risolvono colle addotte formole approssimative, e converrà ricorrere alle eq.ni trascendenti onde le abbiam derivate: eppure la risoluzione si fa assai laboriosa Fastidiosissima poi diverrebbe se i 2 termini non fossero equalmente allontanati dall'origine come K' e K". Difatti si chiami x' e x" le rispettive saette ON, OL; y' y" le mezze tese K'N, K"L; T'T" le tensioni nei 2 punti K' e K"; s' s" gli archi OK' OK"; e B sia la costante che esprime la tensione in O, quando il peso dell'unità di lunghezza cioè K si fa =1 (la quale ipotesi si assumerà d'ora in avanti) avremo fra queste 9 quantità,



3 eq.ni per ciascuno dei punti K e K': onde date 3 di esse si dovrebbero ottenere le altre 6 eliminando successivamente fra 9 eq.ni altre algebriche altre trascendenti. Questi inconvenienti si evitarebbero con una costruzione grafica come diremo si vedrà.

L'eq.ne in x e y della catenaria non contenendo altro parametro che B fissata la tensione orizzontale, segue che tutte le catenarie omogenee i cui parametri siano B e b; prendendo su ciascuna di esse un punto tale che le ampie rispettive X e x stiano fra di loro :: B:b ancora per suddetti punti si avrà: Y:y :: S:s :: T:t :: X:x :: B:b

cioè tutte le linee omologhe saranno tra loro proporzionali: E questo è facile a dimostrarsi. Difatti noi abbiamo $S=\sqrt{2BX+X^2}$ $s=\sqrt{2bx+x^2}$. Ora $x=X\frac{b}{B}$ per ipotesi. Dunque $s=\sqrt{2b\frac{X}{B}+X^2\frac{b^2}{B^2}}=\frac{b}{B}\sqrt{2BX+X^2}=\frac{b}{B}S$: ossia $S:s::B:b$. La dimostrazione è analoga per le altre quantità.

Sia dunque costrutta la catenaria omogenea K'OR con parametro B_1: sarà facile per questa, data una qualunque delle quantità X, S, Y, T, trovare per questa le altre. Ma la proporzionalità sopra accennata ci porge il mezzo di farlo per qualunque altra catenaria come si va a vedere ora.

Sia difatti proposto uno dei 4 primi casi della Reg. precedente in cui è dato $B=C$, e una delle quantità x, y, s, τ. Per fissare le idee sia dato $\tau=\mathcal{T}$ si tratta di ottenere i corrispondenti x, y, s. Noi avremo chiamando τ_1 la tensione della curva K'OR nel punto omologo a quello che si domanda nella catenaria di parametro C, $\tau_1:B_1::\mathcal{T}:C$ onde è facile costruire τ_1. Ma detta x_1 la ascissa del punto omologo della catenaria B_1 sarà perciò $K=1$, $T_1=B_1+x_1$ onde $x_1=\tau_1-B_1=B_1\left(\frac{\mathcal{T}}{C}-1\right)$. Se $T_1=OL$, $B_1=IB$ sarà $x_1=OP$, $y_1=PM$ $s_1=OHMI$. Onde è facile concludere $s=s_1\frac{C}{B_1}$, $y=y_1\frac{C}{B_1}$, $x=x_1\frac{C}{B_1}$: e così è pienamente risoluto il problema.

Lo stesso metodo serve per gli altri casi, così quando dati x, y, si cerca s, T, B si osserverà che pel punto omologo al cercato sarà $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x}{y}$. Sulla quale si tiri la retta OA per O tale che tang. $AOL=\frac{y}{x}$ nel punto M si avrà il punto cercato e sarà $x_1=OP$, $y_1=PM$, $s_1=OHMI$, $T_1=x_1+B_1=OI$ Onde si concluderà $s=s_1\frac{x}{x_1}$ $T=T_1\frac{x}{x_1}$ $B=B_1\frac{x}{x_1}$ Né meno facile è la risoluzione grafica delle altre questioni. Osserveremo solo che nei punti omologhi gli angoli delle tangenti alle curve colla verticale saranno gli stessi.

Invece però di procedere graficamente, ciò che comporta sempre non molta

esattezza, si può ridurre in numeri la figura della catenaria $K''CK$, calcolandone per ogni punto, o almeno per una serie di punti molto vicini fino a quel limite entro cui la costruzione dei punti presenti si può effettuare. L'ascissa, l'ordinata, l'arco e la tensione appartenendo per B un certo valore per es. 100. È manifesto che le questioni verranno coll'ajuto di queste tabole a risolversi collo stesso metodo di cui abbiamo fatto uso nella costruzione grafica, sostituendo al tracciamento delle rette e alla loro misurazione l'esposizione delle tavole. Tavole di questa natura furono calcolate nel 1826 da DAVIES-GILBERT e stampate nella società reale di Londra, e tradotte in italiano da C. GIULIO nel 1851.

Nella 2ª di quelle tavole calcolata nell'ipotesi di $B=100$ la lettera T rappresenta il quoziente $\frac{T}{K}$ delle formole precedentemente esposte, poichè si ha $T=K$ per $K=1$. Essa serve a costruire per punti qualsivoglia catenaria quando sia dato B. Serve pure a risolvere uno qualunque dei 3 casi in cui non è dato B: poichè date 2 qualunque delle quantità x, y, s, T se ne prese eguali ad h la ragione loro, si cercheranno nella tavola 2 quantità omologhe che stiano fra loro nella medesima ragione h: e detta i la ragione di ognuna di queste alla corrispondente data sarà $100\,i$ il cercato valore di B.

Esempio 1°. $B=40^m$; $x=2^m,065$. Ragguagliando il valore di x nella ragione di 40:100 verrà $x_1=5,162$: cercato questo numero nella colonna x della tavola e si troveranno nella medesima orizzontale $y_1=32^m$: $s_1=32^m,349$ $T_1=105^m,163$ e diminuendo questi 3 numeri nella ragione di 100:40 si avranno $y_1=12^m,8$, $s=13^m,02$, $T=42^m,07$. L'espressione di T in metri significa che se p è il peso di un metro di catena sarà $T=42,07\,p$, ossia che T è il peso di 42 metri e 7 centimetri di catena.

Esempio 2°. Vogliasi avere $x = 12^m$, $s = 56^m$, e quindi $\frac{s}{x} = 5$. Cercando nella tavola II 2 valori corrispondenti di x e s che stiano fra loro in questo rapporto si troveranno $x_1 = 24,76$, $s_1 = 74,61$ che proporzionalmente soddisfano: e sulla stessa linea orizzontale $y_1 = 69$ $T_1 = 124,76$: diminuendo tutti questi numeri nella ragione di 24,76 al 12 si avranno $x = 12^m$, $s = 56^m,18$, $y = 55^m,146$ $T = 60^m,51$, $B = 118^m,5$. Qualora non si trovino nella tavola numeri che soddisfacciano con bastante approssimazione ai dati della questione si farà uso del noto metodo delle parti proporzionali

Generalmente nei problemi relativi alla costruzione dei ponti sospesi è data la tratta $2y$. Se presa ad arbitrio una mezza staffa qualunque $y = l$ si determinerà successivamente a B diversi valori, e per ciascuno di questi si calcoleranno i corrispondenti valori di s, x e T e si registreranno in una tavola: dato qualunque altro valore ad y aumentando o diminuendo i numeri della tavola nella ragione di r ad y si avranno i valori di B, x, s e T convenienti al caso proposto. A questo provvide appunto GILBERT colla sua 1ª tavola, del cui uso ecco un esempio. La tavola è calcolata nell'ipotesi di $y = 100$.

Essendo la tratta di 150^m vogliasi che la tensione non ecceda il peso di 200^m di lunghezza del ponte: onde debba essere $T < 200$. Prendendo questo ultimo numero nella ragione di 150 a $2y = 200$ esso avrà $T' = 266,66$ e cercando nella colonna T il numero immediatamente inferiore a questo si trova $T_1 = 261,13$ al quale corrispondono $x_1 = 21,126$, $s_1 = 102,89$ $B_1 = 210$: tornando dunque a diminuire questi numeri nella ragione 200 a 180, si troverà $x_1 = 18^m,84$ $s = 77^m,17$ $B = 180^m$. Se i 2 termini fossero ineguali alti il calcolo riesce un po' meno semplice ma tuttavia assai speditо.

Esempio. Sia la tratta K'K di 100^m, la differenza K'a dell'altezza dei 2 termini di 10^m: e debba essere x'=10^m, ossia 1.0 = 20^m. Non avendo poste le convenzioni fatte nel principio di questa lezione, y'+y"= 100^m x'= 10^m, x"= 20^m: dimodochè per la somiglianza delle figure nella catenaria tabulare si dovrà avere $\frac{x_1'}{x_1''} = \frac{x'}{x''} = \frac{1}{2}$ o $x_1' = \frac{1}{2}x''$ e $y_1' + y_1'' = 10x_1'$ perciò $y'+y'' = 10x'$. Con prova e questa prova si troverà mercè della tavola II che prendendo in essa $x_1' = 11,^m 76$ si avrà $y' = 48$, $x_1'' = 23,48$, $y'' = 67,25$: $y_1' + y_1'' = 115,25$ $x_1' = 9,82$. Invece di 9,82 dovrebbe aversi 10: tuttavia l'approssimazione è già assai grande. Ancor meglio soddisfano i seguenti valori: $x_2' = 11,249$, $y_2' = 47$, $x_2'' = 23,598$ $y_2'' = 65,9$: $y_2' + y_2'' = 112,9 = x_2' \times 10,03$ in luogo di $10x_2'$.

Arrestandoci dunque a questa sistema tutti i numeri trovati dovranno diminuirsi nella ragione di 11,249 al 10. Onde i cercati elementi saranno

$B = \frac{100}{1,1249} = 88,^m 86$. $y_1' = \frac{47}{1,1249} = 41,^m 76$, $y'' = \frac{65,9}{1,1249} = 58,^m 24$:

$T' = B + x' = 98,^m 86$. $T'' = B + x'' = 108,^m 86$.

Bastino questi esempi a dimostrare l'utilità che si può ricavare dall'uso delle tavole di GILBERT, nel calcolo dei progetti relativi ai ponti sospesi.

(N. Teoria matematica dei ponti pensili con tavole per agevolarne la costruzione del Sig Davie-Gilbert, che prende della società reale di Londra tradotta dall'Inglese da Carlo Ignazio Giulio. Torino 1831)

LEZIONE LIX.

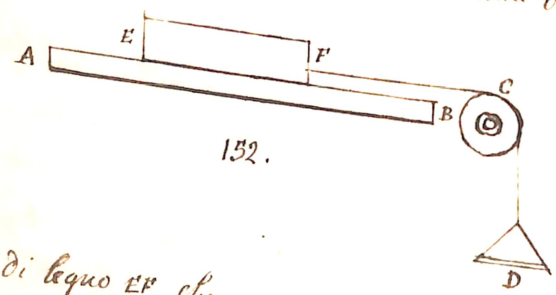
Dell'attrito – Attrito nel 1° distacco e attrito nel moto continuo – Esperienze sull'attrito e leggi che se ne deducono – Come dalla considerazione dell'attrito resti modificata la posizione e la direzione delle azioni che 2 corpi si trasmettono per uno o più punti.

DICESI attrito quella resistenza, che 2 corpi appoggiati e premuti scambievolmente, oppongono a scorrere l'uno sopra l'altro sotto l'influenza di altre forze. Noi abbiamo sinora fatto astrazione da questa resistenza: ma nell'applicazione pratica delle teorie matematiche è necessario tenerne conto. Nei corpi non levigati questa resistenza proviene da che le prominenze di uno dei 2 internandosi nella cavità dell'altro più o meno perfettamente e viceversa, per trarne conviene usare una certa forza che misura la resistenza dell'attrito. Queste prominenze esistono sebbene sono sovente insensibili, anche nei corpi più levigati: onde è manifesto che l'attrito fra corpi levigati deve esser minore che fra corpi scabri. Non è poi da confondere questa resistenza del tutto meccanica, con quella che fra corpi levigatissimi proviene dalle azioni delle molecole dell'uno su quelle dell'altro, ossia dalla coesione.

Sotto 2 aspetti diversi deesi considerare l'attrito; o 2 corpi da un certo tempo venuti a contatto, in certi loro punti si vogliono far scorrere l'uno sull'altro, e mettere o l'uno o ambi in movimento; ed allora la resistenza che a questo moto si oppone dicesi attrito nel primo distacco. Oppure o uno di questi 2 corpi è già in moto sull'altro, o ambi sono in movimento l'uno sull'altro. Allora questa resistenza tende a distruggere tale movimento, rallentandolo ognora di più. Or per mantenere questi corpi nel loro stato di moto converrà aggiungere

una certa forza, la quale produrrà così un moto equabile. Noi sappiamo che un corpo si muove equabilmente o quando non è sollecitato da veruna forza acceleratrice, o quando queste si fanno equilibrio. Resta dunque che per l'applicata di una certa forza un corpo pesante conservi un moto equabile, forza è concludere che la potenza applicata equilibra una resistenza del genere degli attriti, e che diminuisce attrito col moto continuo. La considerazione di questa specie appartenendo esclusivamente alla dinamica, noi per ora ci limiteremo all'attrito nel 1° stato.

È facile il vedere che molte circostanze debbono influire sull'attrito. La natura delle materie fra cui esso si esercita: Lo stato di aggregazione e di pulimento delle medesime: le pressioni dei corpi pesanti l'uno sull'altro; l'estensione delle superficie di contatto; la durata del contatto delle medesime influiscono o possono influire sull'attrito. Siccome poi quasi non si tratta di determinare l'attrito per teorie matematiche, stando questa resistenza in dato puramente sperimentale, molti fisici tra i quali primeggiano i nomi illustri di DESAGULIERS, DAUBENTON, XIMENES, COULOMB e MORIN, si occuparono della determinazione delle sue leggi. Noi esporremo brevemente i risultati delle esperienze eseguite da COULOMB a Parigi, e da XIMENES in Toscana verso la fine del secolo scorso.



132.

Il tribometro (che questo è il nome degli apparecchi con cui si misura l'attrito) di cui si servirono questi sperimentatori consiste essenzialmente in una tavola di legno EF che può scorrere sulla tavola AB orizzontale pure di legno. Il questa tavola è attaccato un filo flessibilissimo in F, il quale avvolgendosi intorno a una mobilissima puleggia C può sopportare qualunque peso per mezzo del

piattello D Applicando alla faccia superiore della gatta lamine di qualsivoglia so-
stanza e lo stesso facendo per la faccia superiore della tavola AB; di più variando a pia-
cimento il peso della gatta sovrapponendovi pesi ad arbitrio è facile vedere che si propo-
nendo eseguire gli esperimenti con tutte quelle varietà di circostanze che si vorranno, l'ordi-
ne i principali e sostanziali sono questi.

Misurando l'attrito dal peso da convenire porre in D onde spostare la gatta di al-
cun poco, si troverà che per le stesse sostanze poste in pari condizioni, cioè egualmente
lisciate, in lamine di egual superficie e dopo eguali tempi o durate di contatto gli attri-
ti erano proporzionali alle pressioni; cioè se la gatta con pesi a cassetta aveva il peso
P, e per spostarla conveniva porre in D il peso Q, per spostare la gatta quando
il suo peso era p, bisognava caricare D del peso q tale che $P:Q::p:q$. ovvero

$$\frac{P}{Q} = \frac{p}{q} = \frac{1}{f}.$$

dove f è la ragione costante del peso rimanente all'attrito alla pressione, e che si dice
però coefficiente d'attrito. Onde per la pressione P_1 sarà l'attrito $Q_1 = P_1 f_1$ se
f_1 è il coefficiente d'attrito della sostanza considerata. Ecco la medesima pressione
sarà dunque tanto più piccolo l'attrito quanto più piccolo è f_1

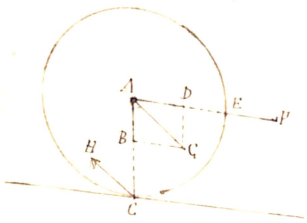
2°. L'attrito non dipende sensibilmente dall'ampiezza della superficie soffre-
gante. Difatto se si prende un parallelepipedo rettangolo di cui le 3 facce contigue
allo stesso vertice siano notabilmente diverse di superficie, e si attacchi alla fune FC
se queste 3 facce sono allo stesso grado di lisciatura e siano della stessa materia
il peso D rimanente l'attrito sarà lo stesso, qualunque delle 3 facce si scelga per su-
perficie di soffregamento, benchè le aree ne siano ben diverse. Questa legge non è più
più vera quando le facce freganti si riducono a punti o a linee: allora l'attrito
è modificato dalla disposizione, numero, e lunghezza delle linee, e dal numero dei punti.
Non regge ancora quando le superficie fregate siano estensissime in confronto delle

pressione; perciò allora la forza di coesione non è più trascurabile rispetto alla pressione e la resistenza cresce col crescere della superficie di attrito.

3° Finalmente è provato che l'attrito nel momento in cui cessa la quiete del contatto fra le 2 superficie, ha quello di pezzi metallici puri e ben puliti è rapidissimo, e tocca il suo massimum istantaneamente; onde è per l'attrito è fra corpi pietrosi le 2 superficie metalliche non vengono alterate da cause esterne. Fra legni e legni quest'attrito richiede 2 o 3 minuti per giungere al massimo grado. Fra legni e metalli l'attrito non arriva al suo maximum che dopo molte ore e dopo molti giorni.

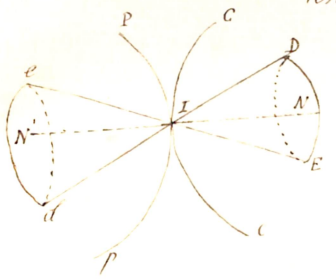
Noi abbiamo detto parlando dell equilibrio di superficie che quando due sono in equilibrio l'azione esercitata dall una sull altra è diretta secondo una linea Normale comune ai due superficie nel punto di contatto. Ma ciò essa generalmente è il caso vero quando si ritorna la composizione dell attrito e almeno non si può prendere fra tanti così ristretti.

153.



Sia per es. il piano qualunque AG e supponiamo orizzontale e supponiamo applicata una forza EF incapace a vincere col suo attrito col piano sottoposto la resistenza qualunque forza l'unica azione del corpo sarebbe una pressione sul piano eguale al suo peso AB. Ma la forza EF in A, la parallela delle forze applicate al corpo sarà AC. Quindi per C il corpo tenderà al piano sottoposto un azione obliqua HC eguale e parallela ad AC: di cui la componente verticale sarà eliso dalla resistenza del piano e la componente orizzontale dall attrito. Ma EF se dicasi P il peso del corpo o AB, f il coefficiente d'attrito, può

variare da zero a Pf senza che l'equilibrio si turbi: dunque la direzione ACOHG può ~~variare~~ fare colla AG un angolo che può variare da zero fino a quell'angolo che ha per tangente $\frac{BC}{AB} = \frac{Pf}{P} = f$, senza che l'equilibrio punto si turbi. L'angolo che ha per tangente f chiamandosi angolo d'attrito, non vedere 2 superficie toccantesi in equilibrio non potremo più affermare che le loro scambievoli azioni nei punti di contatto siano normali alle 2 superfici: ma diremo che la loro direzione non può fare colla comune normale un angolo maggiore dell'angolo d'attrito: ossia che questa direzione è compresa entro il cono NIN' che ha per asse la normale comune e di cui le generatrici fanno coll'asse l'angolo d'attrito, e il vertice è in I. Questo cono potrebbesi chiamare cono d'attrito



15h

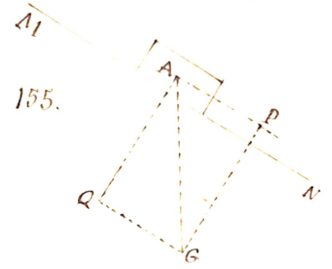
ciò per 2 superficie toccantesi in un punto: Se il contatto si facesse per una superficie piana o curva, batterebbe per tutti i punti posti sulla periferia di questa erger i coefficienti comuni di attrito. Le loro intersezioni coefficienti formerebbero una superficie regolata, ed generatrici ellittiche da cono d'inviluppo di tutti questi coni. Le azioni delle superficie l'una sull'altra sarebbero tutte contenute entro questa superficie inviluppo.

(Venturoli 498 - 508 - Poisson 259)

LEZIONE IX.

Equilibrio di un grave posto su di un piano scabroso soggetto soltanto alla forza di gravità dell'attratto che ne fa centro. Equilibrio di una grave posto su d piano soggetto a attrito – Applicazione all equilibrio di una grave appoggiato a 2 piani uno orizzontale l'altro verticale – Di una grave appoggiato ad un piano orizzontale e ad un fulcro.

PER applicare le cose precedenti alla ricerca proposta quesione ci accingiamo a considerare l'equilibrio del grave A sopra il piano MN ordinato e soggetto ad attrito. Sia G il suo peso: decomponendolo in 2 forze P, Q una parallela l'altra normale al piano, questa sarà data dalla sua resistenza, e per l'equilibrio è



Al

155.

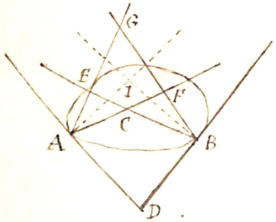
necessario che l'altra P sia eguale all'attrito del corpo contro il piano. Siano z la pressione del corpo contro il piano, φ l'angolo il piano MN colla orizzontale; sarà AGP = φ z = Q = G cos φ, P = G sen φ: e l'attrito sarà detto f il suo coefficiente Qf = G f cos φ. Bisogna per l'equilibrio che G f cos φ > G sen φ, ovvero che tang φ < f. E dunque f la tangente dell'angolo φ quando il corpo A incomincia a staccarsi dalla sua posizione. Ecco qui un metodo semplice per trovare f per la data materia. Basta inclinare il piano su cui si collocano d'un angolo tale che appena cominci a scorrere sopra di esso; la tangente di quest'angolo è precisamente il coefficiente di attrito. Questo metodo è singolarmente utile, perchè molte difficoltà sono adduce a pratica. Figurandosi una bilancia e lasciando cadere poco a poco l'un piano sopra l'altro, si troverà che un corpo posto in un vaso della bilancia, il peso della bilancia. Mercè questo

l'altezza h e il raggio r della base di questi coni si avrà per tale ovatorio

$$\tan g\varphi = f = \frac{h}{r}$$

Noi abbiamo considerato (Lez XXXIII) le condizioni di equilibrio di un grave appoggiato a 2 piani facendo astrazione dall'attrito. Sarà facile ora dedurre la condizione dell'attrito fra il corpo e i 2 piani facendo uso della considerazione dei coni d'attrito. Infatti se si considera un corpo che appoggi sopra per 2 punti a 2 piani inclinati sia in equilibrio, descrivendo con 2 punti di contatto i 2 coni d'attrito (i quali saranno eguali o no secondo che i coefficienti f e f' saranno o no per i 2 piani) questi si dovranno intersecare e la verticale del centro di gravità dovrà passare per lo spazio comune ai 2 coni, affinchè l'equilibrio sussista. Infatti tenendo fisso il peso G del corpo possa scomporsi in 2 forze applicate ai 2 punti di contatto, e le cui direzioni siano continuate nell'interno dei 2 coni d'attrito. Perchè ciò possa farsi è manifesto che altro non si debbano trovare G in un medesimo piano verticale coi punti di contatto, bisogna che esso possa estendersi applicato in un punto che sia nell'interno dei 2 coni, sia che porta la condizione sopra enunciata. Se adunque il piano verticale passante pel centro di gravità e pei punti di contatto sia il piano del foglio, e siano AG, AF, BG, BE le generatrici secondo cui esso interseca i 2 coni d'attrito, converrà per l'equilibrio che la verticale condotta pel centro di gravità passi dentro al quadrilatero da esso formato $EGFC$, ossia tramezzo ai punti E, F.

156.



Estendendo questo concetto al caso in cui il corpo tocchi i 2 piani secondo 2 superficie estese, sarà facile vedere che per l'equilibrio conviene 1° che condotto pel centro di gravità qualunque piano verticale, converga che almeno uno di essi tocchi ambe le superficie di contatto, 2° che costruendo per le 2 superficie di contatto i 2 inviluppi dei coni d'attrito dei singoli loro punti, queste superficie si incontrino. 3° che la

verticale del centro di gravità passi per le gambe esterne a quelle a cui sono attaccati.

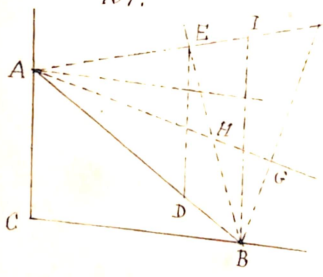
Quanto alle pressioni, in ambi i casi, ne vale dalle premesse, non si ottiene altrimenti, perchè il peso del corpo non cambia applicato, comunque si applichi, tutti i momenti sono uguali.

Nel caso di cadalto esterno, ancora, si ottiene la stessa cosa, perchè il peso del corpo non cambia applicato, comunque si applichi, tutti i momenti sono uguali.

Nel caso di cadalto esterno, ancora, si ottiene la stessa cosa, perchè il peso del corpo non cambia applicato, comunque si applichi, tutti i momenti sono uguali.

Applichiamo questo ragionamento generale alla determinazione dell'equilibrio di una spranga rigida appoggiata a 2 punti l'uno orizzontale l'altro verticale, e tenuta in equilibrio dagli attriti esercitati alle sue 2 estremità. Condotto per questa spranga un piano verticale, sia desso quello del foglio e siano AC, CB le altezze dei 2 punti appoggio e verticale. Posto la linea parallela ai lati AC, CB le altezze dei 2 punti appoggio e verticale. Posto la linea parallela ai lati AC, CB le altezze dei 2 punti appoggio e verticale.

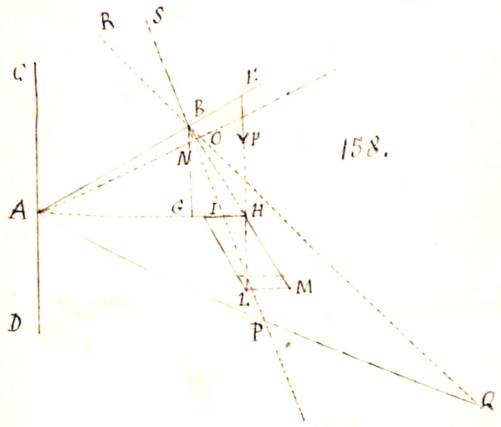
157.



equilibrio finchè l'uomo sale da B in D; ma quando l'uomo supera il limite D cadendo esso come a disporsi orizzontalmente l'asta la scala non si rovesci giacchè questa posizione prenda l'assistente vasi necessario che il punto E cada in A oppure dalla altra parte della parete CA. ciò che succede quando l'angolo IBE è eguale o maggiore di IBA Richiedesi adunque che affinchè la scala non si rovesci mai che la sua inclinazione alla verticale sia minore dell'angolo d'attrito pel punto B.

Sia a risolvere la seguente questione proposta la 1ª volta da Euler. Una spranga inflessibile AE appoggiata al muro verticale CD e al suolo orizzontale

B è gravata da un peso EF attaccato in E: determinare i limiti fra i quali il punto E' è compreso qualora si sia rotta la parete CD e sul punto B attrito. Nel caso in cui non vi sia attrito il peso EF dovendo far equilibrio alla resistenza del muro che si esercita secondo la BM normale alla spranga, bisognerà 1° che la spranga sia contenuta in un piano verticale perpendicolare al muro: 2° che la verticale EL condotta pel punto ove si applica il peso passi pel punto H tra-



158.

tto delle 2 normali BH, AH. Allora detta a la distanza AG del punto B al muro a la distanza nota AB, x la distanza incognita AE dovrà aversi per la somiglianza dei 3 triangoli ABG ABH AHE la progressione geometrica.

$$\therefore AG : AB : AH : AE \quad \text{ovvero} \quad \therefore a : a : AH : x.$$

Detta q la ragione di tal progressione sarà dunque

$$q = \frac{a}{a} \qquad AH = aq - \frac{a^2}{a} \qquad x = q \times AH = \frac{a^3}{a}$$

che se conoscendosi x si voglia avere a sarà $a = \sqrt[3]{x a}$.

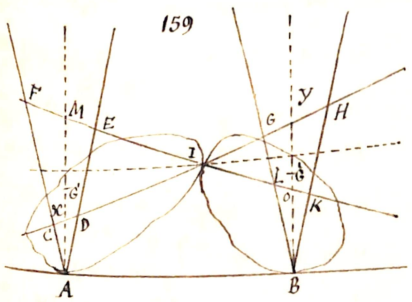
Ma nel caso in cui si consideri l'attrito non sarà più necessario che il piano verticale passante per la spranga sia ortogonale al muro. Sia il piano verticale della spranga rappresentato dal piano del foglio e sia CD l'intersezione suo col muro. Eretto nel punto A il cono NAP di attrito e nel punto B la superficie inviluppo di tutti i coni d'attrito della retta AE in B, che hanno per assi le semirette normali alla AE, la quale superficie inviluppo è essa stessa un cono a 2 falde SBQ RBP avente per asse la AEE, converrà che queste 2 superficie si incontrino

e che le verticali passanti per K. passino tutte quante per un punto, sia N A P Q B P sieno le intersezioni del piano del foglio colle [illegible] e sia [illegible] parlato, bisognerà che K H attraversi il rettangolo N C Q P, e che K sia compreso tra le verticali dei punti N e Q. Le 9 posizioni restano quindi limitate al solo H I e H M in cui si scompongono [illegible] il punto K trasportato in H. talchè l'altro rimangono indeterminate.

LEZIONE LXI

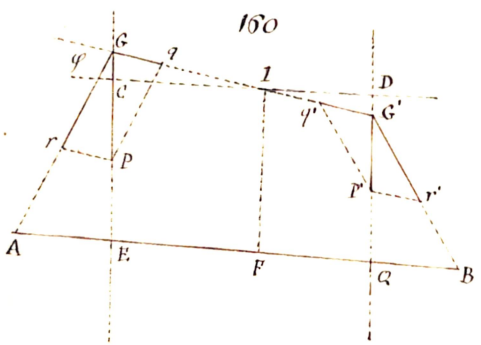
Equilibrio di 2 gravi appoggiati contro uno o 2 piani e l'un contro l'altro nell'ipotesi dell'attrito – Equilibrio di più corpi soggetti ad attrito appoggiati gl'uni contro gli altri – Equilibrio di un filo sopra una superficie soggetta ad attrito e specialmente sopra una superficie cilindrica – Come questa ricerca indefinitamente la resistenza.

SIANO i 2 corpi AI, BI appoggiati fra loro in I e ambi posanti sul piano orizzontale AB. Per l'equilibrio bisogna che i loro pesi applicati ai centri di gravità possano risolversi in 2 pressioni ciascuno, dirette ai punti di contatto: di più queste 2 pressioni non debbono uscire dai coni d'attrito dei rispettivi contatti. Onde necessariamente il centro G del corpo M dovrà essere nel medesimo piano verticale con A e I, e similmente G' dovrà trovarsi nella stessa verticale con B e con I. Siccome di più le 2 pressioni in I devono essere direttamente contrarie, prima condizione sarà che i centri di gravità e i punti di contatto siano tutti nel medesimo piano verticale. Affinchè poi l'equilibrio sussista converrà che condotti i coni d'attrito nei 3 punti, se FAE, FHKG, GBH sono le intersezioni loro col piano verticale suddetto che supponiamo esser il piano del foglio, la verticale condotta per G passi nel quadrilatero FECD, e la verticale condotta per G' passi pure pel quadrilatero IGHK. Oltre a ciò bisognerà che le pressioni in I siano eguali e direttamente contrarie. Siccome C si può applicare in qualunque punto della porzione MX della sua verticale compresa nel quadrilatero, e così G' in qualunque punto della OY, si prega di applicarli in M e G' in O: e troviamo colla decomposizione le pressioni in I. Generalmente



queste non saranno eguali, e supponiamo che quella più grande sia pressione del corpo BI. Allora si immagini il punto d'applicazione del peso del corpo AI trasportato in X e quello del corpo BI in Y e troviamo per questa posizione le 2 pressioni, la quale altra maggiore la pressione del corpo AI avrà posizione subcentrale e 2 punti d'applicazione potrà dare le 2 pressioni eguali e ci sarà equilibrio. Ma se quella altra maggiore la pressione di BI l'equilibrio non potrebbe aver più luogo.

Posto dunque che l'equilibrio abbia luogo si può domandare quale è la posizione che si deve dare ai punti di applicazione delle 2 forze affinchè i pesi conservino sempre eguali. Il problema di resistenza è il seguente: Sia su una retta orizzontale 2 punti A, B e 2 rette verticali GE, DQ luogo cui sono applicate 2 forze verticali P e P' far passare per I lato una tal retta GG' che decomponendo P e P' secondo GI GA; G'B, G'I le forze Gq G'q' siano eguali e contrarie. Sia AE = a BQ = b; EF = x FQ = c; GI = h e l'angolo retto GIC = φ. Noi avremo $Gq = P \frac{\operatorname{sen} AGE}{\operatorname{sen} rGq}$, ora



$\operatorname{tang} AGE = \frac{AE}{IF + GC} = \frac{a}{h + x \operatorname{tang} \varphi}$

Ma si ha ancora $\operatorname{sen} AGE = \frac{a}{AG}$;

poi $rGq = IGE + AGE = 90° - \varphi + AGE$, cioè

$\operatorname{sen} rGq = \cos\{\varphi - AGE\} = \cos\varphi \cos AGE + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} AGE = \cos\varphi \frac{h + a \operatorname{tang}\varphi}{AG} + \operatorname{sen}\varphi \frac{a}{AG}$

onde veramente $Gq = \frac{Pa}{\cos\varphi (h + x \operatorname{tang}\varphi) + a \operatorname{sen}\varphi}$ Nello stesso modo si ricava

$G'q' = \frac{bP'}{\cos\varphi (h - b \operatorname{tang}\varphi) + b \operatorname{sen}\varphi}$ Onde eguagliando questi due valori si ha.

$$Pa\left[(h - b\tan g\varphi) - b\tan g\varphi\right] = P'b\left[h + a\tan g\varphi - a\tan g\varphi\right]$$

Onde immediatamente risulta $\tan g\varphi = \dfrac{h\,(Pa - P'b)}{Pa(a+b) - P'b(a-\alpha)}$ Così è facile determinare i punti a e a' dove debbono intendersi applicati i pesi dei 2 corpi, e la direzione della scambievole pressione.

Quando i 2 corpi invece di esser appoggiati a un solo piano fossero appoggiati a 2 piani inclinati o a 2 superficie curve le condizioni si applicano egualmente con quelle modificazioni che i casi particolari domandano. E quando i contatti invece di essere puntiformi fossero superficiali, converrebbe ai corpi sostituire le superficie inviluppi di cui nelle precedenti lezioni si è tenuto discorso. In questo caso basterebbe per l'equilibrio che condotti 2 piani verticali che in mezzo a loro comprendano tutti i centri di gravità dei corpi (se questi sono più di 2) almeno due fra questi passino per le basi di contatto e le tocchino in qualche punto tutte senza oltrepassarne alcuna.

Equilibrio di un filo sopra una superficie curva soggetta ad attrito. Noi abbiamo veduto parlando delle filarie, che la curva d'equilibrio di un filo sopra una superficie curva esente da attrito, quando non interveniva altra forza che quelle applicate ne' termini del filo era una filaria. Nel caso in cui la superficie sia soggetta ad attrito la curva non sarà più una filaria di lunghezza massima o minima una porzione di quella scostarsi alquanto da destra e a sinistra, guerelo la normale principale cioè quella contenuta nel piano osculatore, faccia in ciascun punto colla normale alla superficie un angolo minore dell'angolo d'attrito. La tensione del filo varia da un punto all'altro a cagione dell'attrito che opera nell'arco intercetto, sia a un punto qualunque del filo f il coefficiente d'attrito, T la tensione, N la forza normale, ρ il raggio di curvatura, ds dello stesso ~~la curva~~ la forza premente è Nds (ciò pel caso in cui la curva sia piana, ec

sgheuba φ è l'angolo compreso tra le 2 generatrici estreme della sviluppata superficie sviluppabile che si genera dal moto della tangente alla curva); sarà l'aderenza dell'arco stesso contro la superficie $\int N ds$: e poichè per ogni punto coincide $T = Np$ sarà $N = \frac{T}{p}$; onde l'accrescimento dT della forza tangenziale che non è altro che $fNds$ sarà $\frac{dT}{T} = f\frac{ds}{p} = fd\varphi$, se sia $d\varphi = \frac{ds}{p}$ l'angolo di contingenza. Onde la somma degli attriti lungo tutto il lembo della falda sarà data dall'eq. $T = Ke^{\pm f\int d\varphi}$ dove all'uno dato il doppio segno all'integrale poichè l'attrito può equalmente resistere a una forza applicata a un capo tangenzialmente al filo e nel suo opposto, e designato con K una costante da determinarsi in modo che pel principio del filo la curva abbia suo piano osculatore normale alla superficie, poichè in caso diverso l'eq. $\frac{dT}{T} = f\frac{ds}{p}$ non potrebbe rappresentare la pressione che suppone l'attrito non eccedere più Nds: allora bisogna mutar d'alquanto il calcolo. Poichè in cui l'attrito sia costante nel suo coefficiente f avremo $T = Ke^{\pm f\varphi}$ e quindi allora φ l'angolo delle 2 tangenti estreme dell'arco che si considera. Così pel caso in cui la curva sia piana; se è sgheuba φ è l'angolo compreso tra le 2 generatrici estreme della sviluppata superficie sviluppabile che si genera dal moto della tangente alla curva. Se P sia la forza applicata ad un estremo, Q quella applicata all'estremo opposto e l'origine dei φ è il punto d'applicazione della forza P, sarà allora per $\varphi = 0$ $T = P$ e quindi per l'altro estremo detto α l'angolo φ, per l'altro estremo nel senso scelto nella nota qui sotto, sarà la tensione con cui fa Q equilibrio all'altro estremo $Q = Pe^{\pm f\alpha}$ Ecco cosa dice che Q e P potranno stare fra loro tanto nel rapporto $e^{f\alpha}$ come nel rapporto $e^{-f\alpha}$, se ci ha equilibrio quando Q è e volte P ci avrà pure quando P è eguale a e volte Q.

Se consideriamo per es. un filo avvolto intorno ad una superficie cilindrica chiusa in modo che esso sia tutto in un piano ortogonale alle generatrici;

l'angolo γ sarà l'angolo compreso fra le 2 tangenti estreme condotte ai punti ove si applicano P e Q. Allora è manifesto che qualunque forma e grandezza abbia la base del cilindro, il raggio di P a Q non dipenderà che da quest'angolo. Ciò fa vedere come negli spigoli dove le curvazioni di γ sono grandissime in piccolissimo spazio, l'effetto fra P e Q possono essere enormi, e che quindi immensa quantità d'attrito in essi si svolge. Ecco l'utilità alla grandissima precisione che in questi punti effetto esiste nella superficie, perchè ivi il raggio di curvatura è minimo.

E poi da notarsi che quando il filo fa molti giri intorno alla superficie cilindrica, q acquistando un valore immenso molto grande $e^{\frac{2}{\pi}pq}$ esprimerà un numero grandissimo o piccolissimo secondochè il segno è positivo o negativo. Quindi è potuto contenere o esser contenuto in Q tanto colle grandi cogliamo: e coll'ajuto dell'attrito una piccolissima forza potrà resistere a una potenza immensa. Ciò spiega perchè volendo resistere ad una gran forza applicata ad una fune basta avvolgerla attorno ad un cilindro fisso la fune per quattro o cinque giri, perchè una forza non grande basti a distruggere l'effetto

INDICE

(A) INTRODUZIONE DEFINIZIONI.

LEZIONE I. (PAG) Introduzione sulla filosofia naturale – Metodi di induzione e deduzione – Chinematica – Meccanica e sue divisioni.–

LEZIONE II. (PAG) Proprietà che considera la meccanica nei corpi – Estensione; divisione fisica e geometrica dei corpi – Loro – Impenetrabilità, e penetrazione apparente – Stato d'aggregazione; solidi e fluidi – Fluidi liquidi ed aeriformi, incomprimibili ed elastici – Gaz e vapori – Divisione della Meccanica secondo questo stato di aggregazione; Pneumatica –. Inerzia e sua legge – Forze e loro definizione.

LEZIONE III (PAG) Equilibrio – Quiete – Direzione – Retta – Moto rettilineo – curvilineo – uniforme – variato – accelerato – ritardato – Spazio – velocità.

(B) FORZE E LORO MISURA.

LEZIONE IV. (PAG) La Meccanica non considera le forze nell'intima loro natura – Tiene in esse solo ragione del punto di applicazione – della direzione – della direzione – dell'azione loro e dell'intensità delle medesime – Modo di valutare i 3 primi elementi – Coordinate polari e rettangole – Angolo di una retta con 3 assi di coordinate e di 2 rette fra di loro –

LEZIONE V. (PAG) Quarto elemento delle forze, ossia loro intensità – Sua misura statica per mezzo dei pesi – Misura dinamica delle forze – Lemmi sulle forze eguali – sulle forze proporzionali alle masse – alle velocità – Teorema della proporzionalità delle forze alle quantità di moto da esse prodotte – Formola che se ne deduce per caso in cui sia l'unità di forza quello che nell'unità di tempo imprime l'unità di velocità all'unità di massa.

(C) COMPOSIZIONE E RISOLUZIONE DEI MOTI E DELLE FORZE.

LEZIONE VI (PAG) Moto assoluto e relativo – Moto relativo di 2 punti percorrenti la medesima retta con moto uniforme – Teorema del parallelogrammo delle velocità – Data la grandezza e direzione la velocità assoluta di 2 punti nello spazio, trovare la velocità relativa – Scomposizione della velocità assoluta nelle componenti.

LEZIONE VII. (PAG) Applicazione della scomposizione dei movimenti a la spiegazione dell'aberrazione della luce – Velocità della luce e della terra – Fenomeno analogo a quello d'aberrazione spiegato colla scomposizione dei movimenti – Determinazione dell'angolo d'aberrazione, delle fasi e forma della curva d'aberrazione.

LEZIONE VIII. (PAG) Forze componenti e forze risultanti – Composizione e risoluzione delle forze – Teorema sopra un sistema di forze in equilibrio – Parallelogramma delle forze – Dimostrazione diretta col parallelogramma delle velocità – Dimostrazione di NEWTON – Composizione di un numero qualunque di forze, costruzione grafica per mezzo di un poligono – Quando il poligono è chiuso il sistema è in equilibrio

LEZIONE IX. (PAG) Risoluzione delle forze – E' problema indeterminato – Formole per la composizione e risoluzione delle forze – Teoremi che danno relazioni fra le componenti e la risultante – Spiegazione dei segni delle forze – Risoluzione di una forza secondo 2 o 3 assi ortogonali – Composizione di un numero qualunque di forze poste in un piano o nello spazio per mezzo della loro risoluzione secondo 2 o 3 assi ortogonali –

LEZIONE X. (PAG) Rappresentazione delle direzioni di più forze – Date 2 forze agenti su un punto poste su una curva nelle direzioni delle tangenti e delle ordinate della medesima, mutarle in 2 forze agenti secondo la tangente e la normale alla curva in quel punto – Problema inverso – Applicazioni a casi particolari –

(D) Composizione e risoluzione delle forze parallele.

LEZIONE XI. (Pag) Delle forze applicate a diversi punti dello stesso corpo – Teoremi che le riguardano e modo di comporle quando agiscono in forze nel medesimo piano – Caso particolare in cui le forze siano parallele – Dedozione di alcuni teoremi inerenti alle forze parallele e modo di comporle –

LEZIONE XII. (Pag) Dimostrazione diretta dei teoremi sulle forze parallele – Principio della Statica e dimostrazione datane da FOURIER – Teorema d' ARCHIMEDE – Caso delle forze parallele in cui non vi ha risultante – Coppia – Composizione di un numero qualunque di forze parallele – Questione relativa –

LEZIONE XIII. (Pag) Scomposizione delle forze parallele – Problema indeterminato – Condizioni che lo determinano – Risoluzione di una forza in 3 forze parallele e teorema di EULERO. – Discussione dei varii casi – Risoluzione di una forza in 4 parallele applicate a 4 dati punti – Problema indeterminato è perchè – Argomenti addotti per provare che è determinato e loro nullità – Risoluzione di una forza in un numero qualunque di forze parallele –

LEZIONE) Centro delle forze parallele.

LEZIONE XIV. (Pag) Invariabilità del punto di applicazione della risultante di più forze parallele comunque diriette si muti la direzione – Centro delle forze parallele – Formole per trovarne immediatamente la posizione – Loro discussione – Momento di una forza rispetto ad un piano – Teoremi sui momenti delle forze parallele – Composizione e risoluzione delle forze parallele per mezzo dei loro momenti –

(F) CENTRO DI GRAVITÁ.

LEZIONE XV (PAG) Caduta dei corpi – Gravità – Verticale e piano di livello – Convergenza delle verticali e sfericità della terra – Peso di un corpo – Sua proporzionalità alle masse – Bilancia geometrica – Modo di determinare il peso di un corpo – Densità e suoi rapporti colla massa e col volume – Peso specifico e suoi rapporti col peso assoluto e colla massa – Unità di densità di peso specifico – Corpi omogenei ed eterogenei – Che cosa debbasi intendere per densità di un corpo in dato punto

LEZIONE XVI (PAG) Centro delle forze parallele di gravità o centro di gravità – In esso si può supporre riunito tutto il peso del corpo – Metodo meccanico per determinarlo – Determinazione del centro di gravità di un sistema rigido di punti e di corpi dei quali si conoscono i centri particolari di gravità – Centro di massa o di inerzia – Centro di volume quando il sistema è omogeneo – Nota d'un caso particolare.

LEZIONE XVII. (PAG) Centri di gravità e suoi perimetri delle più semplici figure piane omogenee – Che cosa si intenda per centro di gravità delle linee e delle superficie – Centro di gravità della retta – di 2 rette ad angolo – Del perimetro di un triangolo – Dimostrazione del teorema del centro di gravità dei corpi simmetrici rispetto ad un piano, ad una linea, ad un punto – Applicazione all'invenzione del centro di gravità dell'area di un triangolo – Centro di gravità di un trapezio e di qualunque quadrilatero – Di qualunque poligono e del suo perimetro. –

LEZIONE XVIII. (PAG) Centri di gravità delle superficie dei poliedri – di un tetraedro qualunque – di una piramide regolare – di un cubo prismatico – Centri di gravità dei volumi dei poliedri – Di una piramide triangolare – Di una piramide qualunque – di un cono qualunque – di un tronco di piramide – di un tronco di cono

– di un cuadro regolare

LEZIONE XIX. (PAG) Centri di gravità delle figure terminate da archi circolari o da superficie sferiche – Centro di gravità di un arco di circolo – di un settore circolare – di un segmento circolare: della superficie di una calotta sferica – del volume di un settore sferico – di un segmento sferico a uno o due basi parallele o non parallele –

LEZIONE XX. (PAG) Formole per trovare le coordinate del centro di gravità di un corpo di figura e densità (uniforme o variabile) qualunque – Formole per trovare il centro di gravità di un arco di curva qualunque – Applicazione al circolo e alla cicloide – Formole per avere il centro di gravità di qualunque area piana, terminata da rette e da curve – Applicazione alle sezioni del cono –

LEZIONE XXI. (PAG 142) Centri di gravità delle superficie e dei volumi di rivoluzione – Formole per determinarli – Applicazione al tronco di cono, alla calotta e al segmento sferico, all' Ellissoide, Paraboloide ed Iperboloide di rivoluzione

LEZIONE XXII. (PAG 149) Centri di gravità di porzioni qualunque di superficie curve ed omogenee e formole per determinarli – Applicazione all'emisfero e teorema notevole che se ne trae – Sua analogia col teorema sul centro di gravità di un arco circolare – Formole pei centri di gravità di volumi omogenei limitati da superficie qualunque.

LEZIONE XXIII. (PAG 158) Centri di gravità dei corpi qualunque eterogenei e formole per determinarli – Tre casi che possono avvenire secondochè la densità è funzione di una due o tre delle variabili – Applicazione al cilindro, alla sfera ed al cono

LEZIONE XXIV. (PAG 169) Centri di gravità delle superficie piane terminate da curve o non esprimibili con un equazione analitica o condizionati ad in-

tegrali non è seguibile – Formola delle quadrature paraboliche, e formola che dà l'ascissa del centro di gravità di una delle superficie piane suddette.

LEZIONE XXV (PAG 171) Estensione delle formole di BEZOUT e di SIMSON alle 3 dimensioni – Equazione del volume e dell'ascissa del centro di gravità di un solido prismatico quadrangolare terminato superiormente da una superficie qualunque – Metodo per avere tutte le coordinate del centro di gravità, tanto delle aree, quanto dei solidi colle stesse formole.

LEZIONE XXVI (PAG 178) Regola combinabile – Teorema del padre GULDIN intorno alle superficie e ai solidi di rivoluzione – Loro applicazione alla misura del volume del toro e della botte – Avvertenze circa l'uso di questo teorema – Teorema del medesimo esteso alla misura di un arco generato da una linea percorrente col suo mezzo una curva qualunque

LEZIONE XXVII. (PAG 189) (F) EQUILIBRIO DI UN PUNTO. Equazioni di equilibrio di un punto libero – Teorema di LEIBNITZ – Teorema di ROBERVAL. – Applicazione loro alla risoluzione di una questione, notabile teorema che se ne trae.

LEZIONE XXVIII. (PAG 196) Equilibrio di un punto sopra una superficie non soggetta ad attrito – Equazioni di equilibrio di un punto obbligato a stare su 2 superficie ad un tempo – Quale sia la condizione d'equilibrio di un punto fisso – Equilibrio di un punto soggetto a muoversi nelle guise sovra date condizioni, ed obbligato a vole vincole.

(H) MOMENTI DI ROTAZIONE.

(PAG 203)

LEZIONE XXIX. Equilibrio di un punto intorno ad un punto fisso – Momento di rotazione di una forza rispetto ad un punto – La somma dei momenti

delle componenti è eguale al momento della risultante – Espressione analitica del momento di una forza ed equazione d'equilibrio del piano intorno al punto fisso –

LEZIONE XXX (PAG 209) Equilibrio di un sistema rigido intorno ad un asse fisso – Momento di rotazione di una forza rispetto ad un asse – Condizione dell'equilibrio del sistema: la somma algebrica dei momenti delle forze deve esser zero –

LEZIONE

EQUILIBRIO DEI SISTEMI RIGIDI SOLLECITATI DA FORZE PARALLELE

LEZIONE XXXI (PAG 212) Condizioni generali di un sistema rigido sollecitato da forze parallele – Equilibrio dei corpi pesanti – Equilibrio di un grave sospeso o appoggiato ad un piano per un punto – Equilibrio stabile, instabile, neutro.

LEZIONE XXXII (PAG 218) Modo generale per determinare in quale posizione di equilibrio è un grave appoggiato ad un piano per un punto – Equilibrio di un punto sopra una curva o superficie qualunque – Equilibrio di un piano appoggiato ad un punto, per più punti o per una base –

LEZIONE XXXIII. (PAG 222) Stabilità relativa di un corpo appoggiato per più punti o per una base sopra un piano orizzontale – Misura di questa stabilità – Applicazioni alle costruzioni e alle torri pendenti – Pressioni sugli appoggi – Equilibrio di un peso appoggiato a 2 piani inclinati per 2 punti o per 2 basi – Pressioni su ciascuno dei 2 piani –

LEZIONE XXXIV. (PAG 229) Applicazione del teorema generale enunciato nel fine della Lez XXXII a casi particolari – Cilindro a base qualunque – Cilindro elittico – Catena – Applicazioni all'equilibrio di uno o più fluidi pesanti – All'equilibrio di un corpo attirato da 2 o più centri d'attrazione secondo una certa legge –

Equilibrio di un corpo posto fra 2 piani inclinati e ritenuto per un punto – Applicazione alle macchine di pressione.

(I) TEORIA DELLE COPPIE

LEZIONE XXXV (PAG 239) Coppie Intensità Braccio – momento – piano – verso della coppia – Tre teoremi preliminari nella trasformazione delle coppie – Riduzione di più coppie contenute in più piani paralleli ad una sola –

LEZIONE XXXVI. (PAG 246) Composizione delle coppie – Composizione di 2 coppie – Composizione di un N.ro qualunque di coppie, e determinazione analitica della coppia risultante.

(L) EQUILIBRIO DI UN SISTEMA RIGIDO SOLLECITATO DA FORZE QUALUNQUE.

LEZIONE XXXVII (PAG 250). Riduzione di un sistema di forze qualunque ad una risultante unica che passi per un punto dato, più una coppia giacente in un piano che passa per lo stesso punto – Casi in cui si ha equilibrio o risultante unica –

LEZIONE XXXVIII. (PAG 253) Verificazione e calcolo del teorema della Lez precedente – Formole per aver la risultante unica e la coppia unica che provengono dalla riduzione di un sistema qualunque di forze – Equazioni di equilibrio – Condizione necessaria perchè tutto il sistema si riduca ad una forza unica – Osservazione su questa condizione.

LEZIONE XXXIX. (PAG 260) Formole per ottenere la risultante unica di un sistema di forze qualunque quando la condizione $F\Sigma X + G\Sigma Y + H\Sigma Z = 0$ si verifica – Applicazione al caso di 3 forze qualunque parallele ai 3 assi coordinati –

LEZIONE XL. (PAG 262) Condizioni di equilibrio di un sistema rigido ritenuto per un punto fisso – Condizioni di equilibrio di un sistema rigido appoggiato per un punto ad una superficie data, o sopra una curva intersezione di 2 superficie – Determinazione della pressione in tutti questi casi.

LEZIONE XLI. (PAG 271). Condizioni di equilibrio di un corpo ritenuto per 2 punti fissi – Calcolo delle pressioni sui cardini, e ragione dell'indeterminazione della pressione sofferta da ciascun cardine nel senso dell'asse – Equilibrio di un sistema appoggiantesi per 2 punti su due superficie curve –

LEZIONE XLII. (PAG 269) Equilibrio di un sistema rigido sia 3 superficie date – Equilibrio di 2 corpi che si appoggiano l'un contro l'altro – Equilibrio di più superficie e corpi rigidi appoggiantesi gli uni contro gli altri e contro le superficie resistenti.

(M) EQUILIBRIO DEI SISTEMI DI FORMA VARIABILE
POLIGONI FUNICOLARI.

LEZIONE XLIII. (PAG 274) Proprietà che impediscono che i corpi quali si trovano in natura possano considerarsi come sistemi rigidi – Estensibilità – Compressibilità – Elasticità – Equilibrio di un filo sollecitato da 2 forze – Tensione del filo – Leggi dell'allungamento dei fili – Formole che danno l'allungamento per date tensioni – Leggi della compressione delle corpi rigide e formole relative.

LEZIONE XLIV. (PAG 282) Problemi riguardanti l'estensibilità e la tensione dei corpi – Tensione di più fili estensibili sostenenti un grave rigido, o pressione di più sostegni compressibili reggenti un grave di egual natura; supponendo il grave gravato di un peso – Moduli di tenacità e di elasticità –

LEZIONE XLV (PAG 289) Equilibrio dei fili flessibili – Equilibrio di più fili

concorrenti in un nodo e sollecitati da forze comunque dirette – Casi particolari di 2 fili – Equilibrio di un filo applicato ad un anello scorrevole lungo un altro filo fisso per i suoi 2 capi –

LEZIONE XLVI (PAG 292) Poligono funicolare – Costruzione della figura di equilibrio del poligono data la grandezza e la direzione delle forze sollecitanti – Data la figura di equilibrio del poligono e le tensioni dei lati costruire la grandezza delle forze sollecitanti – Equazioni di equilibrio del poligono funicolare –

LEZIONE XLVII. (PAG 297) Equilibrio del poligono funicolare di uno o di ambo i termini fissi – Caso in cui uno o i termini siano obbligati a scorrere lungo curve date – Equilibrio del poligono funicolare chiuso – Caso in cui il poligono è regolare o diventa un circolo – Caso in cui vi siano degli anelli scorrevoli.

LEZIONE XLVIII. (PAG 303) Equilibrio del poligono funicolare sollecitato da forze parallele o carico di pesi – La tensione orizzontale è costante – La tensione applicata dei lati è inversamente proporzionale al seno dell'angolo colla verticale – Le direzioni dei lati ciascuno prolungato passano pella verticale del centro di gravità dei pesi – Nel poligono equilibrato il centro di gravità è il più basso possibile

(N) CURVE FUNICOLARI – CATENARIE.

LEZIONE XLIX (PAG 308) Curve funicolari – Catenarie – Rappresentazione delle forze sollecitanti – Loro componenti longitudinale – Caso in cui queste forze derivino da uno o più centri attraenti – Il binomio $X dx + Y dy + Z dz$ è allora un differenziale esatto perchè il filo sia catenario e omogeneo.

LEZIONE L. (PAG 313) Equazione generale di una curva funicolare gobba qualunque – Espressione della tensione in qualunque punto – Modo di determinare le costanti arbitrarie introdotte dalle integrazioni delle suddette equazioni – Curve funicolari a tensione

liberi e a termine fissi – Condizioni preliminari per l'integrabilità delle loro equazioni

LEZIONE LI (PAG 319) Modo di pervenire alle equazioni di una curva funicolare qualunque quando X, Y, Z, non sono date in funzione di s ma solo di x, y, z – Per un punto di una curva funicolare qualunque, l'incremento della tensione su quella del punto che la precede è eguale alla componente tangenziale della forza applicata al medesimo; e la tensione è eguale alla componente normale della forza sollecitante riferita all'unità di filo moltiplicata pel raggio di curvatura della curva.

LEZIONE LII (PAG 323) Integrazione delle equazioni della Lez precedente e determinazione delle costanti arbitrarie – Loro estensione alle 3 dimensioni – Catenaria e determinazione delle costanti arbitrarie – Loro estensione alle 3 dimensioni – Catenaria o Catenaria – In ogni suo elemento la tensione è costante e la forza Normale è inversamente proporzionale al raggio di curvatura – Sua costruzione dalle forze Normali, data la figura della curva –

LEZIONE LIII. (PAG 328) Equazione della pianta direttrice del cilindro secondo cui si conforma il fondo flessibile di un canale cilindrico: determinazione delle costanti arbitrarie – Equilibrio di un filo teso alle estremità da 2 forze eguali e premente una superficie curva – La curva secondo cui si dispone è la minima distanza tra i 2 estremi costandola sulla superficie – oppure è la massima –

LEZIONE LIV. (PAG 332) Delle catenarie – Loro proprietà – Equazione differenziale di tutte le catenarie – Data la figura di una catenaria, trovare la legge della distribuzione dei pesi lungo la medesima – Data la figura di un filo pesante abbandonato al suo peso trovare la legge con cui cresce le sue tensioni e la sua curvità.

LEZIONE LV. (PAG 338) Integrazione dell'equazione $\pi dy = A ds$ per casi particolari – Catenaria – parabola o curva di ponti sospesi – Catenaria omogenea – sua equazione – sua lunghezza – sua tensione – suo raggio di curvatura –

LEZIONE LVI (PAG 342) Espressione dell'area della luneta, del raggio di curvatura e dell'ascissa della catenaria in funzione dell'ordinata – Determinazione della catenaria di minima tensione – Applicazione ai ponti pensili – Limite della lunghezza dei ponti pensili da catene o da cavi di ferro –

LEZIONE LVII. (PAG 349) Costruzione della catenaria omogenea secondo condizioni date – Discussione completa dei tre casi che si presentano quando si vogliono costruire sul medesimo livello – Determinazione della minima tratta da una data lunghezza data può avere un filo teso di una data materia –

LEZIONE LVIII. (PAG 356) Metodo di Poleni approssimativamente per una costruzione grafica il problema della Lez. precedente – Trasformazioni di queste costruzioni in tavole – Uso delle tavole di DAVIES – GILBERT per la risoluzione dei medesimi problemi quando i pesi che compongono non sono –

(O) DELL' ATTRITO.

LEZIONE LIX. (PAG 361) Dell'attrito – Attrito nel distacco e attrito nel moto continuo – Esperienze sull'attrito e leggi che se ne deducono – Teoria dell'attrito considerazione dell'attrito resta modificata la posizione e direzione delle azioni che i corpi si trasmettono per mezzo di più punti –

LEZIONE LX. (PAG 365) Equilibrio di un grave posto su un piano inclinato soggetto ad attrito – Nuova maniera dell'attrito che se ne deduce – Equilibrio di un grave da 2 piani soggetti ad attrito – Applicazione all'equilibrio di una spranga appoggiata a 2 piani l'uno orizzontale l'altro verticale – Di una spranga appoggiata ad un piano verticale e a una fulcro. –

LEZIONE LXI (PAG 371) Equilibrio di 2 gravi appoggiati contro un piano

e fra di loro nell'ipotesi dell'attrito – Equilibrio di più corpi appoggiati gli uni contro gli altri e soggetti ad attrito – Equilibrio di un filo sopra una superficie soggetta ad attrito e specialmente sopra una superficie cilindrica – Come questa materia le scritture vadefinita mente –

INDICE del 1° volume PAG 377.

FINE DEL PRIMO VOLUME.

65841